Modul L: Entwicklung der Mathematik bis 1900

Vorwort zu diesem Modul L

Die Mathematik ist von unermeßlicher Wichtigkeit für die Entwicklung einer Technischen Zivilisation (TZ). Mathematik kann man am besten bei denen lernen, die sie erfunden und weiter entwickelt haben, den mathematischen Genies.
Das logische Denken ist für die Gründung der Mathematik sehr wichtig, aber auch das intuitive Gespür, die geeignetsten Annahmen und Axiomensysteme voranzustellen, bevor man mit dem logischen Denken anfängt. Die mathematischen Genies verfügten sowohl über die geniale Intuition als auch die Fähigkeit zur Logik. Es ist aber auch wichtig, allgemein Genieforschung zu betreiben und die Rolle der Genies für die Entwicklung der TZ realistisch abzuschätzen. Das geschieht in der Zukunfts- und Zivilisationsforschung. Dies stützt das Konzept, Unterricht, Lehren und Lernen genieorientiert zu praktizieren.

Jeder sollte diesen Modul L als Ausgangsbasis für einen eigenen, persönlichen Modul für Mathematik und logisches Denken verwenden und speziell für sich weiter ausarbeiten, um zu erkennen, wo die Schwerpunkte der eigenen genialen Intuition, Begabung und Erkenntnismethode speziell in der Mathematik und beim logischen Denken liegen. Auch die anderen Moduln G bis I kann man für sich selber weiter ausbauen, um die eigene Weltsicht und eigene Stellung in Evolution und Geschichte realistisch einzustufen.

Jeder kann sich diese Module herunterladen und aus eigenem Wissen und aus eigener Einsicht heraus zu verbessern suchen. Versuchen Sie, den genialen Schöpfungsakt möglichst deutlich zu machen.

Allgemeines

Mathematik lernen bedeutet für die meisten Menschen, sich in die völlig fremd erscheinenden Gedankengänge längst verstorbener Menschen einzuarbeiten. Dabei werden sich viele Menschen fragen, was das für einen Nutzen haben soll. Das ist leicht zu beantworten:
Nicht unsere Triebe, Gefühle, Launen, Traditionen ... entscheiden über Sinn und Wahrheit, sondern die Wahrnehmung und Erfüllung der objektiven Aufgaben von Intelligenten Wesen, und um das zu leisten, benötigt man besonders die Naturwissenschaften wie Physik, Chemie, Biophysik, Biochemie ... und die Ingenieurwissenschaften, die beide ganz wesentlich auf mathematische Verfahren gestützt sind. Die Mathematik nimmt also eine Schlüsselrolle in den Beschreibungsverfahren ein.

Mathematik muß man von der Genieforschung her zu verstehen suchen, wobei man versucht, dem Genialen in seiner ursprünglichen Form zu begegnen, bevor mittelmäßig denkende Menschen die genialen Konzepte der Genies versemmelt haben und z.T. ganz falsch oder entfremdet darstellen. Wenn man dem Studium noch Zivilisations- und Zukunftsforschung beifügt, kann man nur Vorteile davon haben.
Darum gilt die Forderung, den Unterricht genieorientiert durchzuführen, wobei man im Unterricht stets versucht, Zugang zu den Menschen zu finden, die die entsprechenden Ideen gehabt haben. Die Schüler und Studenten sollen sich in den Genies wiederfinden - allerdings auch in deren Schicksal.

Mathematischer sowie natur- und ingenieurwissenschaftlicher Unterricht müssen genieorientiert erfolgen. Wenn man Algebra oder den Calculus lehrt, muß man zuerst Leben, Werk und Wirkung ihrer Erfinder gründlich darstellen, so daß der Lernende den direkten Zugriff auf die Ideen des schöpferischen Genies bekommt. Entsprechend gilt:

Lernen bei den Meistern !
Orientiere dich nicht an drittklassigen Lehrern oder fünftklassigen Nachbarn !
Lerne bei den Meistern und gehe ihren Weg !
Geist und Materie sind durch geniale Intuition, durch geniales Schöpfertum
zu wunderbarsten Werken zu vereinen.

Die Entwicklung von Vorstellungen, Definitionen und Schreibweisen für mathematische Kalküle und Begriffe dauerte Jahrtausende. Die Forscher, die mathematisches Neuland eröffneten, mußten ihre Terminologie dafür erst selber konstruieren. Dabei wählten sie u.a. auch Bezeichnungen, die sich im weiteren Verlauf der Forschung nicht hielten und ersetzt wurden. So wurde die Terminologie von I. Newton zur Fluxionsrechnung durch die von G. Leibniz zur Infinitesimalrechnung ersetzt.

Oft zeigen die mathematischen Vorstellungen und Bezeichnungen eine starke Verwandtschaft mit dem Harmoniestreben allgemein. Besonders kann man dafür Beispiele aus dem großen Schatz großartiger Leistungen hellenischer Denker und Forscher anführen:

- Die Entwicklung der Geometrie bis zu einer so ausgereiften Höhe wie bei Apollonios,
- das Suchen und Finden von Harmonien in der Fähigkeit, Naturgeschehen durch die Verhältnisse ganzer Zahlen zu erfassen wie bei Pythagoras,
- die Formulierung des mathematischen Wissens in großartigen Werken wie bei Eukleides (Euklid).

Zu den Hauptproblemen der Mathematik gehört die Ableitung von Rechenregeln im weitesten Sinne und die Festlegung ihres zulässigen Definitionsbereiches. Viele langjährige Fehler in Mathematik und Naturwissenschaften hatten als Ursache, daß Rechenregeln oder ganze Theoriegebäude außerhalb des zulässigen Definitionsbereiches angewendet wurden.

Viele Menschen neigen dazu, der Mathematik die Glorie der Vollkommenheit zu geben gemäß dem Leitsatz von Immanuel Kant: "In einer Theorie ist soviel Wahres, wie Mathematik in ihr enthalten ist." Diese Einschätzung hat eine gewaltige Überschätzung der erkenntnistheoretischen Reichweite *aktuell verwendeter* mathematischer Kalküle bei realen Phänomenen zur Folge, wie geschehen bei

- Epizykeltheorie und geozentrischem Weltbild,
- Theoretischer Mechanik, Laplace'schem Dämon und Wärmetod der Welt und
- Allgemeiner Relativitätstheorie mit dem globalen 4D Raumzeit-Kontinuum als Realitätsrahmen, also als Basis und Grundlage *der globalen Realität*, (und nicht etwa nur einer Teilwelt wie einem Blasen-, Baby-, Kind-, Tochter-, Mini- oder Taschenuniversumuniversum), Entstehung dieser *globalen 4D Realität* aus dem Nichts beim Urknall und dem finalem Gravitationskollaps für *die globale Realität* ...

Richtig ist, Mathematik so zu lehren, wie sie von den mathematischen Genies gesehen wurde, nämlich als etwas Unfertiges. Das bedeutet nicht nur Unvollständigkeit oder Fehlerhaftigkeit von Beweisen zu gewissen Epochen - wie z. B. Carl Friedrich Gauß gezeigt hat -, sondern auch der Mathematik als Ganzem mit ihren Methoden und Regelsystemen.

Jeder Mathematiker fängt praktisch immer wieder von vorne an, da der gesamte logische Unterbau der Mathematik immer wieder überprüft werden muß (siehe B. L. van der Waerden). Gerade zu unserer Zeit, wo der diskontinuierliche Charakter realer multidimensionaler Räume über diskreten Objekten (wie z.B. bei den 9D Superstrings) immer wahrscheinlicher wird, sehen wir die Grenzen der Anwendbarkeit des Absoluten Differentialkalküls und die Notwendigkeit, etwas entsprechendes für diskontinuierliche Räume über diskreten Objekten zu entwickeln.

Es ist eine bedeutende Erkenntnis, daß sich mit Logik allein keine brauchbare Mathematik gründen läßt. Die Logik ist sekundär und setzt erst da ein, wo geniale Intuition zum Auffinden der grundlegenden Postulate (Axiome) geführt hat. Die Axiomen muß man durch Intuition finden, ebenso die Richtung, in der man die Mathematik zu konstruieren hat.

Es ist aber auch Aufgabe der Logik, die einzelnen Schritte in der intuitiv erkannten Richtung zu konstruieren. Das ähnelt den Verhältnissen in der physikalischen Forschung, aber hier gilt im Gegensatz zur Mathematik, daß man sich an der Natur orientieren kann.

Bei einer physikalischen Theorie mag man zwar mathematisch noch im Definitionsbereich des mathematischen Kalküls dieser Theorie operieren, in den physikalischen Verhältnissen aber schon längst nicht mehr. Physik ist eben etwas grundsätzlich anderes als Mathematik. Physik hat ein Vorbild, die Natur, die Mathematik hat weder Vor- noch Urbild. Sie ist eine ganz freie Schöpfung des bildenden Geistes.

Die mathematischen Schöpfungen wie Polynome und Zahlentheorie sind reine Erfindungen. Die aufgefundenen mathematischen Formeln für physikalische Zusammenhänge existieren in der Natur niemals wirklich, sondern sind immer nur Näherungen, die aber so gut sein können, daß ihre Abweichungen von den realen Verhältnissen weit unterhalb jeder regional-epochal verfügbaren Meßgenauigkeit liegen.

Kurt Gödel hat 1931 mit seinem nach ihm benannten "Gödelschen Unvollständigkeitssatz" die Behauptung aufgestellt, daß es wahre mathematische Behauptungen gibt, die sich mathematisch mit den Mitteln desselben mathematischen Systems nicht beweisen lassen. Modellbeispiel hierfür sind die natürlichen Zahlen und die 5 Peano-Gesetze.

Durch die große Rolle der Intuition, des Schöpferischen, in der Mathematik ist sie mit dem Künstlerischen verbunden.
Das Studium von Leben, Werk und Wirkung der Genies gehört zu den vordringlichsten Aufgaben aller Menschen. Dazu bedarf es der entsprechenden Literatur, und die ist leider oft nicht leicht zugänglich.
Die Genieforschung ist vielen Menschen verdächtig und unbequem.
Welche Probleme kann es z.B. bereiten, etwas mehr über Bernhard Riemann zu erfahren - miserable Zugänglichkeit der oft uralten Literatur !

Schöpferische Menschen zwischen den Mühlsteinen des Alltags

Von 1730 bis 1830 gab es in Frankreich viele sehr fähige Mathematiker und Physiker, und es wäre ja höchst seltsam gewesen, wenn in Deutschland außer Pfaff, Gauß, Humboldt und Jacobi keine vergleichbar intelligenten Menschen geboren worden wären.
Der Fall Evariste Galois in Frankreich liefert den Schlüssel zum Verstehen: In Frankreich war Galois einer der Menschen, die geniale Anlagen hatten, aber vom gesellschaftlichen System regelrecht vernichtet wurden. Aber im Frankreich dieser Zeit fand dennoch ein großer Teil der Begabten den Weg zur höheren Ausbildung. Im Deutschland dieser Zeit hingegen war der Fall Galois alltäglich, und nur wenige Menschen hatten das Glück, durch die Schicht von Rosenkreuzertum, idealistischer Philosophie, Aristokratie und dummen Beamten zu dringen.
Gauß hatte großes Glück, wie sein Lebensweg bis zur Übernahme der alten Sternwarte in Göttingen zeigt. In Rußland waren die Verhältnisse katastrophal (siehe den Weg von Lobatschewsky).
Nachdem Deutschland von 1830 bis 1930 eine führende Rolle auf dem Gebiet der Mathematik und Naturwissenschaften hatte, wäre es kaum sinnvoll, anzunehmen, daß danach plötzlich in Deutschland keine Genies mehr geboren wurden. Dasselbe trifft für Frankreich, Italien, Spanien ... über die Jahrhunderte ihrer Entwicklung zu.
Ganz offensichtlich wurden nach dem 2. Weltkrieg in Europa allmählich wieder die Mechanismen des Mittelalters stärker, als es den Menschen unmöglich gemacht wurde, ihren höheren Regungen und Begabungen zu folgen, mit der Konsequenz, daß die europäischen Länder (mit Ausnahme von England) in ihrer Kreativität deutlich hinter die USA zurückfielen, zeitweilig auch hinter Japan. Warum ?

Galileo Galilei hatte um 1615 die Professoren der Universität von Pisa als Doktoren des Auswendiglernens bezeichnet.
Als Alexander von Humboldt die Mitglieder der Akademie der Wissenschaften in Berlin kennengelernt hatte, war er entsetzt über ihr Geckentum und ihre Abneigung gegenüber wahrer Wissenschaft. Eben dieser selbe Geist hat sich im heutigen Europa wieder breitgemacht, auch wenn jeder Politiker oder politische Beamte laufend das Loblied auf die Forschung sang und singt. Alexander von Humboldt um 1800 über Professoren auf einer Tagung: "Die dortigen Professoren trugen eine geckenhafte Grandezza schriftlich zur Schau."

Sprachregelungen

Arithmetik (Zahlentheorie):
Zahlen können auf vielerlei Weise konstruiert werden.
- Man kann irgendwelchen Symbolen einen Zahlenwert zuordnen (wie bei Sumerern, Hellenen, Römern ...).
- Man kann Symbolen eine Zahlenwert zuordnen und ihrer Stellung in dem Zahlenausdruck Bedeutung geben (römische Methode).
- Man kann Ziffern definieren, und diesen gemäß einem Stellenwertsystem einen Multiplikationsfaktor zuweisen (wie beim Dezimalsystem, indische Methode).

Man kann davon ausgehen, daß das Zählen schon aufgeweckten Frühmenschen, also dem Homo erectus, bekannt war. Welche Mindestintelligenz und Fähigkeit zur Kommunikation für das Zählen notwendig ist, könnte man über Experimente mit Tieren und Tiermenschen wie Schimpansen und Gorillas klären.

Hilfsmittel für das Zählen waren:
- Striche auf Stein oder Knochen,
- Finger,
- Zählsteinchen.

Algebra:
Ein algebraischer Ausdruck besteht aus Zahlen oder Buchstabensymbolen, die durch Operationen wie Addition oder Multiplikation verbunden sind, und wo Klammern den Vorrang von Operationen angeben.

Geometrie:
Die Untersuchung von gezeichneten Dreiecken, Kreisen, Kegelschnitten usw. in der Ebene oder von Figuren im 3-dimensionalen Raum (3D Raum) wie Kugel, Kegel oder Paraboloid.
Referenz: Die Elemente des Eukleides und die Voluminaberechnungen des Archimedes.

Analysis:
Folgen und Reihen von Zahlen, Grenzwerte, Funktionen von Veränderlichen. Die Analytische Geometrie ordnet geordneten Zahlenpaaren Punkte in Koordinatensystemen zu. Diese Zahlenpaare ergeben sich meistens über Einsetzen von unabhängigen Veränderlichen in eine Funktion, wodurch sich ein Funktionswert ergibt (oder auch mehrere).

Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung oder Calculus)
Bei der Differentialrechnung ermittelt man die Steigung einer Funktion beim Grenzübergang zu einem Punkt, was dann die Steigung der Tangente an diesem Punkt der Kurve (dieser gezeichneten Funktion) ist. Bei der Integralrechnung ermittelt man die Funktion (Stammfunktion) zu einer gegebenen Funktion, deren Funktionswerte den Flächeninhalt der gegebenen Funktion darstellen. Beide Verfahren haben ihre wesentlichen Konzepte und Schwierigkeiten in Grenzwertprozessen. Der erste Schöpfer der Infinitesimalrechnung war Isaac Newton, unsere aktuelle Schreibweise wurde von Gottfried Leibniz geschaffen, als er aus einigen Andeutungen Newtons den Calculus nacherfand (der Ausbildung nach war Leibniz Jurist). Eine bedeutendste Anwendung des Calculus liegt auf dem Gebiet der Differential und Integralgleichungen, was zuerst von I. Newton erkannt worden ist.

Topologie:
Sie ist u.a. die Geometrie der Lagerung von Figuren im Raum. Gefragt und untersucht werden die Eigenschaften von Figuren, die bei Zerrung, Stauchung, Torsion usw. des sie einbettenden Raumes erhalten bleiben. Man nehme eine Gummihaut, male darauf einen Kreis und dehne, stauche oder verdrehe die Gummihaut. Was für Eigenschaften des auf die Gummi haut gemalten Kreises bleiben erhalten ?

Differentialgeometrie und Tensoranalysis:
Sie ist im wesentlichen eine Geometrie gekrümmter Flächen in n-dimensionalen (kürzer: nD oder n-d) Räumen in der Schreibweise der Infinitesimalrechnung.
Gauß schuf die Differentialgeometrie im Verlaufe seiner Landesvermessung (geodätischen Vermessung) des Königreiches Hannover um 1827 als eigenständiges mathematisches Gebiet. Er war aber schon an der Frage interessiert, ob unser realer 3D Raum etwa auch so gekrümmt ist wie z.B. die Erdoberfläche. Um diese Frage zu klären, führte er Dreiecksmessungen über große Längen aus. Er und Lobatschewski in Rußland sind die Schöpfer der nichteuklidischen Geometrie.
Riemann erweiterte das Problem auf nD nichteuklidische Räume und schuf in seinen Vorstellungen eine Verbindung zwischen der Struktur der Räume und der in ihnen geltenden Physik.
Die auf Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie aufbauenden kosmologischen Modelle (FRW-Kosmologien) stellen die Gravitation nicht als Kraft, sondern als Krümmung oder geometrische Verzerrung der 4D Raumzeit-Welt dar.

Seit Ricci-Curbastro und Levi-Civita, die den Absoluten Differentialkalkül zur Tensoranalysis entwickelten und dabei die Christoffel-Symbole 1. und 2. Art verwendeten, stellte man die Probleme und Rechnungen der Differentialgeometrie in ihrer Schreibweise dar.
Die Tensoranalysis umfaßt die Tensoralgebra, Analysis und Calculus.

Man kann etliche Phasen der Entwicklung eines Sternes mit Hilfe von Differentialgleichungen recht gut beschreiben, wenn man hinreichend gute Daten über Masse, Zusammensetzung, Turbulenz ... der primären Gas- und Staubwolke hat.
Man kann die Entwicklung von Lebensformen aus chemischen Elementen wie C, H, O, N, S und P bisher auch nicht im Ansatz beschreiben. Die Entwicklung eines Sterns läßt sich in einigen seiner wichtigen Lebensphasen recht gut mathematisch beschreiben, aber die Entwicklung von Leben, Zivilisation und Superzivilisation nicht.
Man kann etliche Phasen der Entwicklung eines Universums gemäß den FRW-Kosmologien recht gut beschreiben, aber nicht die Entwicklung der höheren Wertschöpfungen in einem Universum wie Leben, Zivilisation und Superzivilisation, und FRW-Kosmologien können prinzipiell nicht in das dimensional-räumliche und zeitliche Außen eines Universums sehen.

Wenn man die 5 Axiome des Euklid nicht kennt, sagt es einem nicht viel, wenn man liest, daß das 5. Gesetz des Euklid im Prinzip nicht notwendig sei zur Gründung einer Geometrie.
Auch wenn man den Letzten Satz des Fermat kennt, wird man neuere Versuche zu seinem Beweis nicht verstehen, wenn man kein Spezialist auf entsprechendem Gebiet ist.
Die Christoffel-Symbole erlauben es zwar, Rechnungen auf dem Gebiet des Absoluten Differentialkalküls sehr viel eleganter als mit den früheren Schreibweisen darzustellen, aber die Formelausdrücke zur Differentialgeometrie werden dadurch für den, der diese Schreibweisen nicht kennt, völlig unverständlich. Die Christoffel-Symbole sind Schreibweisen für Differentialformen. Sehr erschwerend ist aber, daß sie meistens auf gekrümmten Koordinaten nichteuklidischer Räume operieren.

In der modernen Physik spielt die Mathematik eine immer weiter zunehmende Rolle, weil beim Versuch, tiefer in die Naturprozesse Einblick zu nehmen, das klassische naturwissenschaftliche Verständnis und auch „der gesunde Menschenverstand“ auf der Strecke bleiben. Man muß akzeptieren, daß man die Prozesse und Strukturen auf sehr kleinen und sehr großen Skalen nicht mit den Erfahrungen auf mittleren Skalen vergleichen und auch nicht verstehen kann. Einen Mathematiker kümmert es sehr viel weniger, ob Quantenprozesse oder relativistische Erscheinungen in das klassische physikalische Weltbild passen. Ein Mathematiker ist sehr viel eher geneigt, nicht mit Daten über die Natur, sondern mit Axiomensystemen zu operieren, die stellvertretend für die Natur sind. Wenn man bereit ist, auch für die Physik die axiomatische Methode zu verwenden, kann man Quantentheorien, Quantenmechanik und Relativitätstheorien viel leichter anerkennen. Deshalb hatten im 20. Jahrhundert in der modernen Physik immer mehr exzellente Mathematiker das Sagen, aber da diese Leute oft kein „physikalisches“ oder kosmologisches Gespür hatten, kamen abstruse kosmologische Vorstellungen für Jahrzehnte zum Tragen, die weder naturwissenschaftlich noch für die Sinnschöpfung irgendeinen Wert hatten. Also übernahmen ab 1955 gute SF-Autoren die Rolle der führenden Kosmologen, und ab 1980 näherte sich die kosmologische wissenschaftliche Forschung den Weltsystemen der SF-Autoren an.
Die Mathematik für die Grundlagenforschung insbesondere in Elementarteilchen- und Hochenergiephysik, Relativitätstheorien und Kosmologie war schwierig und wurde weiterhin immer schwieriger, so daß sie für die Forscher zu schwer wurde und sie nicht weiterkamen – während gute SF-Autoren an ihnen vorübereilten und die Spitze in der Wahrheitsfindung über die Natur übernahmen.
Ab etwa 1998 gilt mit dem Multiversum in der wissenschaftlichen Kosmologie etwa das, was fortschrittliche SF-Autoren bis 1970 entwickelt hatten und eifrig ihre Romane darin ablaufen und ihre Romanhelden darin spielen ließen.

Ägypten
Gemäß der Notwendigkeit, nach jeder Nilüberschwemmung die Felder neu auszumessen, entwickelte sich im antiken Ägypten eine gute Feldmeßkunst, die allerdings oft aus Gier und Bestechlichkeit der Feldmesser schlecht ausgeübt wurde.

Ferner bestand die Notwendigkeit zur Bestimmung von Rauminhalten wie etwa bei Getreidelieferungen der Bauern oder bei Getreidespeichern.
Die Ägypter benutzten Symbole für 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1 Million und 10 Millionen, die sie etwa bis 3000 v.Chr. entwickelt hatten. Sie hatten auch Zeichen für die Brüche 1/2, 1/3 und 2/3.
Die Ägypter beherrschten die 4 Grundrechnungsarten, auch für diese Brüche. Nachweise der Rechenkunst der Ägypter:
- Papyrus Rhind (verfaßt von dem Schreiber Ahmes um 1550 v.Chr.), enthält 84 Aufgaben über Arithmetik und Geometrie.
- Moskauer Papyrus (verfaßt um 1380 v.Chr.), enthält 25 Aufgaben.
- Lederrolle (London).
- Hieroglypheninschriften in Tempeln oder Gräbern.

Für das praktische Rechnen im Alltag wurden neue Symbole entwickelt, und zwar für die Ziffern 1 bis 9, 10 bis 90, 100 bis 900 und 1000 bis 9000. Sie benutzten schon ein Rechenbrett als Vorläufer des Abacus. Sie rechneten mit algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten und konnten sie lösen, wobei sie fast nur konstante Koeffizienten zuließen.
Der Begriff der Variablen war ihnen anscheinend ungeläufig.
Ihre Figuren in der Geometrie waren hauptsächlich Rechteck, Dreieck und Trapez.
Sie kannten die Formeln für ihre Flächeninhalte. Sie hatten den Näherungswert 3,1605 für die Kreiszahl π (3,14152...).
Sie kannten die Volumenformel für einen Pyramidenstumpf mit quadratischem Grundriß.
Ihre Aufzeichnungen haben den Charakter von Regelsammlungen.
Anscheinend kannten sie nicht den Begriff des mathematischen Beweises, wie ihn die Hellenen geschaffen hatten.

Sumer
Die Sumerer hatten um 2200 v.Chr. ein Zahlensystem, das 60 als Basis hatte. Diese Basis bewirkte bei den späteren Babyloniern die Einteilung
- des Tages in 24 Stunden,
- der Stunde in 60 Minuten,
- der Minute in 60 Sekunden,
- des Kreises in 360 Grade.

Die Sumerer benutzten Symbole für 1, 10, 60, 100, 120, 600, 1200 und 3600, sowie für Brüche 1/2, 1/4, 3/4 und einige andere.
Sie benutzten also nebeneinander Zahlsysteme auf der Basis von 10 bzw. 60.
Ein Symbol für die Null hatten sie nicht.
Sie kannten die 4 Grundrechnungsarten. Für Multiplikation und Division stellten sie zur Erleichterung der Alltagsrechnungen Tabellen (Tafeln) auf. Die Priester mußten für ihre astrologischen Vorhersagen recht erhebliche Rechenkenntnisse aufwenden.

Hellas
Das mathematische Wissen der nachfolgenden Babylonier, Assyrer und Chaldäer wurde ab 600 v.Chr. von forschungsreisenden Hellenen wie Thales von Milet und Pythagoras von Samos studiert und teilweise übernommen:
- Stellenwertsystem auf der Basis von 60.
- Die 4 Grundrechnungsarten.
- Algebraische Gleichungen, in denen sie noch nicht mit formalen Unbekannten wie x oder y rechneten, sondern mit der gesuchten Länge oder Breite. Sie rechneten mit Gleichungen bis 4. Grades, wobei sie Lösungsverfahren und Tabellen verwendeten.
- Quadratwurzeln und ein Approximationsverfahren für ihre Lösung.
- "Pythagoreischer" Lehrsatz und pythagoreische Zahlen –
  Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$.
- Formeln für Inhalt von Rechteck, Dreieck und Trapez und für Quader, Prisma und Pyramidenstumpf.
- Analysis: Endliche arithmetische oder geometrische Reihen.

- Hauptsächlich die Hellenen sahen die Notwendigkeit für mathematische Beweise und erarbeiteten Methoden dafür.
Zwischen 1000 bis 800 v.Chr. übernahmen die Hellenen die Schrift ihrer phönikischen Gegner. Die Buchstabenschrift war um 1500 v.Chr. aus der demotischen ägyptischen Schrift als Basis und anderen Schriften wie der kretischen entwickelt worden. Sogar Uraltzeichen des Azilien in Spanien sollen Eingang gefunden haben. Irgendwo im Vorderen Orient hat vielleicht ein Mensch diese bewußte und ganz umsichtig durchgeführte Glanzleistung erarbeitet.
Bis etwa 450 v.Chr. hatten die Hellenen schon mehrere Schriftformen aus dem phönikischen Alphabet abgeleitet. Schon ziemlich früh, um 750 v.Chr., gaben sie die Schreibweise von rechts nach links auf, wie sie bis dahin nur üblich gewesen war.
Die Wandlung des phönikischen Alphabetes (der Name kommt von seinen ersten zwei Buchstaben Aleph und Beth) in das klassisch hellenische bis etwa 300 v. Chr. zeigt eine starke Geometrisierung der Zeichen.
Die Hellenen benutzten Buchstaben ihres Alphabets als Ziffern und Zahlen. Erst ab etwa 1500 n.Chr. (!) gab es im Abendland eine einheitliche Schreibweise für die Ziffern von 0 bis 9 und die Zahlen im Dezimalsystem.

Die Erfindung der Null (0) und des dezimalen Stellenwertsystems war in Indien bis 900 n.Chr. (vielleicht schon bis 680) geschehen. Bis 1000 wurden sie von den Arabern und bis 1500 vom kulturell erwachenden Abendland übernommen.
Fibonacci in Italien machte den ersten Versuch schon um 1200, sie in Europa einzuführen.

Die Hellenen widmeten sich hauptsächlich der Geometrie, die Arithmetik vernachlässigten sie. Die Buchstaben ihres Alphabets bekamen Zahlenwerte, wobei sich bei ihnen erst allmählich eine einheitliche Zuordnung von Zahlenwert zu Buchstabe entwickelte (siehe stigma und vau): 1 für alpha, 2 für beta, ... , 9 für theta, 10 für jota, 20 für kappa, ... , 90 für koppa, 100 für rho, 200 für sigma, ... , 900 für sampi (sadhe).
Für die Darstellung der Zahlen verwendeten sie auch einige der nicht in ihr Alphabet übernommenen phönikischen Zeichen (stigma oder vau, koppa und sampi).
Sie schrieben diese Buchstaben oft mit einem Querstrich darüber, um sie als Zahlzeichen zu kennzeichnen.
Von großem kulturhistorischen Interesse ist dabei der Bedeutungswandel, den die ehemaligen phönikischen Begriffe (Bilder, Symbole) dabei erfuhren:

Phönikisch	Griechisch	Deutsch	Buchstabenwert	Zahlenwert
aleph	alpha	Stier	a (phön.: ‘)	1
beth	beta	Zelt	b	2
gimel	gamma	Kamel	g	3
daleth	delta	Tor	d	4
he	e-psilon	Fenster	e (phön.: h)	5
	digamma		(phön.: w)	6
zain	zeta	Lanze	z	7
khet	eta	Pfahlzaun	e (phön.: h)	8
	theta		t	9
yod	iota	Hand	i	10

Das Symbol für aleph war ehemals ein stilisierter Stierkopf. Da das Wort aleph mit dem Lautwert a beginnt, wurde das Symbol aleph, also das Zeichen oder die Hieroglyphe für aleph, zum Symbol für den Lautwert a.
Bei der späteren Bedeutungsübertragung auf Zahlen bekam dann das Symbol für aleph, ehemals einen Stier bezeichnend, den Zahlenwert 1. Dasselbe Schema galt für die anderen Bilderzeichen.
Um Tausender-Zahlen darzustellen, machten sie vor alpha, beta, gamma usw. ein Komma, also ,α für 1000 und .β für 2000 usw.
Bei dieser Schreibweise waren schon einfache Brüche sehr schwer handzuhaben. Man schrieb z.B. hinter das Symbol für jota ein Apostroph (ı' = 1/10).

Für die Darstellung von Zahlen ab 10000 verwendeten die Hellenen ein großes M für myriade, über das sie ein alpha, beta, gamma setzten zur Darstellung von 10000, 20000, 30000 usw. Sie benutzten aber auch die Schreibweise, das M vor ein Zahlensymbol zu schreiben: Mβ = 20000.
Die Hellenen kannten als Begriffe und Lehrstoff:
- Mathematike: allgemein Mathematik, meistens Geometrie.
- Logistike: Praktische Anwendung der Rechenkunst.
- Arithmetike: Erforschung der Eigenschaften der Zahlen.

Die Entwicklung von Geometrie und Mathematik in Hellas

Innerhalb weniger Jahrhunderte entwickelten die Hellenen eine so gute Geometrie, daß sie dem Abendland für fast 2000 Jahre das Vorbild war. Lehrsätze wie der des Apollonios sind auch nach unseren Maßstäben tiefschürfend und auch für einen heutigen Mathematiker schwierig.
Die Hellenen waren die ersten, die ihre geometrischen Vorstellungen auf das Weltall anwandten, also eine Kosmologie schufen, und von diesen Vorstellungen wiederum wurden sie zu der Entwicklung ihrer Geometrie angespornt, wie bei der Epizykeltheorie.
Schon früh erkannten die Hellenen Probleme, die allein mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind:
- Quadratur des Kreises (ab 450 v.Chr. durch Anaxagoras bekannt),
- Dreiteilung des Winkels,
- Verdoppelung des Inhalts eines Würfels (Delisches Problem).

Sie beschäftigten Mathematiker nahezu 2400 Jahre !
Interessant ist, daß die Hellenen ihre Mathematik sofort mit Beweisen und Lehrsätzen begannen. Die Hellenen betrieben Mathematik um ihrer selbst willen und eben nicht, um Felder oder Kornspeicher zu vermessen, astrologische Berechnungen oder Zinsrechnungen durchzuführen.

Thales von Milet (640?-570? v.Chr.) führte nach dem Zeugnis der Antike Mathematik und Astronomie in Griechenland ein. Er widmete sich hauptsächlich der Geometrie. Er fand und bewies einige Lehrsätze über Dreiecke, Winkel und Kreise.

Pythagoras von Samos (582?-507? v.Chr.), wie Thales viel auf Reisen in den "klassischen" Ländern wie Ägypten und Babylonien (Chaldäa) gewesen, eröffnete in Kroton, Süditalien, eine Schule um 530, wobei er Männer und Frauen aufnahm. Der Name Pythagoras bedeutet Wortführer des Pythischen (Orakel zu Delphoi). Pythagoras eröffnete seine Schule um 530. Das Erkennungszeichen der Schule war das Pentagramm (Sternfünfeck, ein Uraltzeichen). Die Schüler wurden unterrichtet in Geometrie, Arithmetik (Zahlentheorie), Astronomie und Musik. Die wissenschaftliche Ausbildung sollte den Geist der Schüler klären.
Von anderen Völkern wurden Bestrebungen wie die von Thales oder Pythagoras nicht geleistet. Ihnen am nächsten kamen wohl nur noch die Mayas (Indianer) in Amerika.

Pythagoras und seine Schüler (Schule) führten ein:
- Das Wort mathematike für Mathematik,
- das System von Axiomen (Voraussetzung), Behauptung und Beweis,
- die Formulierung der gewonnenen Erkenntnisse in Lehrsätzen (Pythagoreischer Lehrsatz),
- neue Lehrsätze und ihre Beweise,
- Zahlentheorie (Arithmetik), die Lehre von den ganzen Zahlen (arithmoi), umfaßt auch die Lehre von den gebrochenen Zahlen (logoi), die z.B. bei Verhältnissen (Proportionen) wichtig sind,
- die Bedeutung der Zahl für ein qualitatives und quantitatives Verstehen von Naturerscheinungen und Vorstellungen der Menschen, wobei er zuerst nur an die ganzen Zahlen dachte,
- die Lehre der irrationalen Zahlen (megethoi),
- eine wissenschaftliche Geometrie der Dreiecke, Quadrate und von Hyperbel, Parabel und Ellipse,
- Lösungen für spezielle lineare Gleichungssysteme mit n Unbekannten.

Seine Schule unterschied schon gerade, ungerade, teilbare und nicht teilbare Zahlen.

Es wurden allgemeine Zahlengesetze erkannt. Beispiele:

- $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n$
- $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
- $2+4+6+\ldots+(2n)=n(n-1)$

Ein wichtiges Ziel der Pythagoräer war, die Welt mit ihren Erscheinungen allein durch ihre Zahlen und Zahlenverhältnisse zu erfassen. Das wurde zur Grundlage der Harmonielehre.

Zenon von Elea (495-435 v.Chr.) war Logiker und ersann Paradoxa, um den Mitmenschen die vielen Schwächen in der Logik vor Augen zu führen. Seine Kritik an der Logik führte Sokrates (469-399 v.Chr.) in der Form genereller Kritik am Wissen der Menschen weiter.

Hippias aus Elis löste um 460 das Problem der Dreiteilung eines Winkels.

Hippokrates von Chios schrieb das erste bekannte Buch über Geometrie um 440. Er löste das Problem der Verdoppelung des Würfels.

Demokritos von Abdera (460?-362?) schrieb vier Bücher über Geometrie.

Eudoxos von Knidos (408-355) berechnete über seine Exhaustionsmethode (Ausschöpfungsmethode) Flächen und Volumina (5. Buch der "Elemente" von Eukleides) von Kreis bzw. Kugel, Pyramide und Kegel (von Demokritos angegeben, von Eudoxos bewiesen).
Er machte den Anfang zu einer Theorie des Maßes. Seine Theorie der Irrationalzahlen, verwandt mit dem Dedekind'schen Schnitt, war wegweisend bis in das 19. Jahrhundert.

Platon (427-347) beschäftigte sich mit geometrischen Problemen und erforschte das Wesen des Beweises, führte also die ersten Formen von Wissenschaftskritik und Wissenschaftstheorie ein. Er bemühte sich, klare Begriffe und scharfe Definitionen zu geben. In seinen zahlreichen Werken versuchte er, Logik und Vernunft zu erforschen und auf ihnen aufbauende Systeme zu entwickeln. Hervorzuheben sind seine Werke
- Menon: Beweismethode der Geometrie,
- Timaois: Die regulären Körper, die er mit einer Atomlehre verband. Diese Körper haben Oberflächen, die aus 4, 6, 8, 12 oder 20 regelmäßigen Flächen bestehen, z.B. gleichseitigen Dreiecken oder Quadraten. Die 5 regulären Körper sind: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. (Einige Virus-Arten - Bakteriophagen - realisierten das Ikosaeder 3 Milliarden Jahre früher in Form der 20-flächigen Proteinhülle des Viruskopfes.)

Aristoteles (384-322), Schüler von Platon, widmete sich unter vielem anderem der Erforschung und Erfassung der Logik. Er bemühte sich, das Wesen des Beweises und des logischen Schließens zu erkennen, in Fortsetzung der Arbeiten seines Lehrers Platon.
Nach seinem Tode faßte man seine Schriften über die Logik in dem Werk "Organon" (Werkzeug) zusammen, und es blieb für über 2000 Jahre das Lehrbuch der Logik.

Eukleides (330?-275?) eröffnete eine Schule in Alexandreia, der Stadt der hellenistischen Wissenschaft. Er lehrte hauptsächlich Geometrie. Wesentliche Grundsätze von Eukleides (Euklid) waren:
- Die Geometrie beschränkt sich auf Figuren, die nur mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.
- Axiomatische oder postulative Methode.
- Schema der Lehrsätze ist Voraussetzung, Behauptung und Beweis.

Die "Elemente" schrieb er um 300. Sie umfaßten 13 Bücher: Buch 1 bis 6 sind planimetrisch, behandeln Vielecke, Kreis, Ähnlichkeit und Proportionen. Buch 7 bis 10 sind arithmetisch. In ihnen sind Beweise dafür, daß es unendlich viele Primzahlen gibt und daß die Quadratwurzel aus 2 irrational ist. Buch 11 bis 13 sind stereometrisch, wobei Buch 12 Pyramide, Kegel und Zylinder behandelt und Buch 13 die 5 regulären Körper.

Genauere Themenangabe der 13 Bücher:
- Buch 1: Elementare Geometrie, die geometrischen Arbeiten des Pythagoras, Beweis des Lehrsatzes des Pythagoras.

- Buch 2: Planimetrie, Lösung arithmetisch-algebraischer Probleme durch Umschreibung in geometrische Aufgaben.
Seine bedeutendsten Schüler in der planimetrischen Beweisführung:
    - Christiaan Huygens (1629-1695 n.Chr.)
    - Isaac Newton (1642-1727 n.Chr.).
- Buch 3: Elementare Kreislehre, die Arbeiten des Hippokrates von Chios (5. Jahrhundert v.Chr.).

Buch 4, 6, 11 und 12: Die Arbeiten der späteren pythagoreischen und athenischen Mathematiker.
- Buch 4: Reguläre Polygone mit den Eckenzahlen 3, 4, 5, 6 und 15.
- Buch 5: Die Arbeiten des Eudoxos von Knidos: Lehre der Proportionen, Meßbarkeit als Problem der Zahlentheorie, Irrationale Zahlen (ein dem Dedekind'schen Schnitt ähnliches Verfahren).
- Buch 6: Ähnlichkeitslehre, Begriff der Extremwertaufgabe.

Buch 7 bis 10: Höhere Mathematik
- Buch 7: Zahlentheorie, Primzahlen, Teilbarkeit von Zahlen,
- Buch 8, 9: Quadrat- und Kubikzahlen, Proportionen und Folgen, Methode des indirekten Beweises dafür, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.
- Buch 10: Die Arbeiten von Theaitetos aus Athen, darunter geschachtelte Wurzelausdrücke, Theorie der Meßbarkeit, inkommensurable Größen.
- Buch 11: Zylinder, Kegel und Kugel, Geraden und Ebenen im 3-d Raum, Volumenbestimmung von schiefwinkligen Quadern mit paralleler Ober- und Grundfläche.
- Buch 12: Die Inhalte von Kreisen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, die Inhalte von Kugeln wie die Kuben ihrer Durchmesser, Volumina von Prismen.
- Buch 13: Konstruktion der 5 regulären Körper.

Apollonios von Perge (260?-200) lernte von der Schule des Eukleides und überarbeitete das Werk des Euklid über die Kegelschnitte. Er verfaßte mehrere Bücher, von denen erhalten sind:
- Die Theorie der Kegelschnitte (Schnitte einer Ebene mit einem Doppelkegel), Verbindung geometrischer und algebraischer Darstellung, Einführung der Namen Ellipse, Parabel und Hyperbel, aus Eigenschaften ihrer Flächen abgeleitet.
- Die Verhältnisschnitte.

Archimedes (287-212) galt schon zu Lebzeiten als das größte Genie der Antike.
Archimedes, Isaac Newton (1643-1727 n.Chr.) und Carl Friedrich Gauß (1777-1855) gelten als die großen 3 mathematischen Genies der Menschheit.
Archimedes wurde in Syrakus geboren. Er studierte in Alexandreia und führte von da an ein der mathematischen und physikalischen Forschung gewidmetes Leben.
Für fast 50 Jahre war er Berater von Hieron II, Landesvater von Syrakus.

Von Archimedes sind 9 Schriften überliefert:
- Über das Gleichgewicht ebener Flächen, Hebelgesetz, elementare Statik, Schwerpunkte von Dreiecken, Polygonen, Parabelsegmenten.
- Die Quadratur der Parabel. Beweis dafür, daß der Inhalt eines Parabelsegments vier Drittel des Inhaltes des einbeschriebenen Dreiecks ist.
- Die Methodenlehre. Der Wert heuristischer Annahmen und Methoden für die Auffindung und den Beweis der endgültigen Wahrheit.
- Über Kugel und Zylinder. Rauminhalte, Extremwertaufgaben, eingekleidete Aufgaben. Meßbarkeit.
- Über Spiralen. Archimedische Spirale (schon in der Antike berühmt), Einführung von Winkelkoordinaten. Flächenberechnung.
- Über Konoide (Paraboloide, 2-schalige Hyperboloide) und Sphäroide (Ellipsoide). Meßbarkeit, Bestimmung von Rauminhalten über geometrische Integralrechnung.
- Über schwimmende Körper. Hydrostatik, Auftrieb in Flüssigkeiten, labiles und stabiles Gleichgewicht.

- Die Kreismessung. Angabe unterer und oberer Schranken für die Kreiszahl π durch ein- und umbeschriebene Polygone am Kreis. Beweis der Formel für die Kreisfläche.
- Der Sandrechner (die Sandrechnung). Abschätzung der Sandkörner im Weltall, Einführung von Potenzen zur Darstellung sehr großer Zahlen auf der Basis der griechischen Myriaden. Archimedes kam auf weniger als 10^{80} Sandkörner im Weltall.

Archimedes erkannte den Begriff der Kreiszahl, für die erst Leonhard Euler den Buchstaben π einführte.

Einige Großleistungen von Archimedes lagen in der
- Mechanik mit dem Studium von Hebelgesetz und Flaschenzug,
- Schwerpunktberechnung,
- Hydrostatik,
- Konstruktion eines Planetariums,
- Berechnung des Flächeninhalts von Figuren in der Ebene,
- Berechnung des Volumens von Körpern, vor allem Rotationskörpern (geometrische Integralrechnung),
- Anlegen von Tangenten an die Kurve Archimedische Spirale (geometrische Differentialrechnung),
- Berechnung von π (Pi), gelegen im Intervall 3 1/7 bis 3 10/71,
- Zahlenlehre für große Zahlen (Sandrechnung) mit Potenzen.

Etwas zur Genieforschung

Hieron II regierte von 270 v.Chr. bis zu seinem Tode 216 sehr geschickt und umsichtig, unter der laufenden Bedrohung durch Rom. Nach seinem Tode wurde ein Enkel von ihm sein Nachfolger, seine eigene Macht gegenüber Rom völlig überschätzend. Er brüskierte Rom, das den Feldherrn Appius Claudius mit einer Flotte gegen das reiche Syrakus entsandte (im Krieg gegen Karthago). Archimedes wurde gebeten, für die Verteidigung der Stadt zu sorgen. Hinter den Hafenmauern stellte er große Katapulte auf, die Steine gegen die angreifenden Schiffe schleuderten, und große Krane, die die Schiffe ergriffen und wieder zurückfallen ließen. Möglicherweise benutzte er auch große metallene Hohlspiegel, um die Flotte in Brand zu setzen. Daraufhin griff Appius Claudius von Land her an, aber sein Heer mußte wegen des Steinhagels aus den Katapulten fliehen.
Dazu schrieb Polybios, der antike Historiker, die erhabenen Worte:
"An dem gegenwärtigen Beispiel zeigt sich augenfällig, was ein Mann, was ein Geist, wenn er durch eine besondere Anlage begünstigt ist, Großes und Wunderbares zu leisten vermag. Im Besitz so beträchtlicher Streitkräfte zu Wasser und zu Lande hätten die Römer, wenn der Alte Mann in Syrakus nicht gewesen wäre, alsbald der Stadt sich bemächtigen können; da nun aber der Eine auf dem Platz war, so getrauten sie sich nicht einmal, einen Versuch auf die Stadt zu machen, wenigstens nicht auf einem Wege, auf dem ihnen Archimedes entgegentreten konnte."
Auch so etwas gehört zum Wesen eines Genies, obwohl das Spekulieren mit Ölmühlen zwar einträglich sein mag, aber nicht zum typischen Aktionsbereich eines Philosophen gehört (so etwa Thales von Milet um 360 Jahre vorher zu diesem Thema.
Daraufhin ließ Appius Claudius Syrakus belagern und nach 8 Monaten ergab sich die Stadt. Der Soldat, der Archimedes zum Feldherrn bringen sollte, hieb Archimedes nieder, als dieser versunken seine Kreise in den Sand zeichnete.
Appius Claudius betrauerte seinen Tod sehr und ließ ihm das von Archimedes gewünschte Grabmal setzen: Einem Zylinder sind eine Kugel und ein Kegel einbeschrieben. Der Seitenschnitt des Zylinders ist quadratisch (Durchmesser der Grundfläche ist gleich der Zylinderhöhe). Die Höhe des Kegels ist gleich der Zylinderhöhe, die kreisförmige Grundfläche des Kegels ist auch diejenige des Zylinders. Archimedes hatte deren Volumina und Oberflächen sowie deren Verhältnisse zueinander berechnet und sah dies als seine größte Leistung an.
Polybios hat vermutlich die wesentliche Leistung des Genies erkannt und er begründete damit die Genieforschung. Nicht die "Frühreife" ist das Ausschlaggebende, sondern die bei ihm von innen herausströmende höhere Einsicht. So wurde Archimedes die Idealfigur des Forschers und Denkers für Jahrtausende, Leitfigur für spätere Forscher wie Galilei. Wenn neu-

rotische Eltern, Verwandte oder Lehrer Kinder schon im frühen Alter mit Wissen vollstopfen (wie z.B. bei William Rowan Hamilton, Norbert Wiener), so ist das eine verwerfliche Sucht nach Ruhm auf Kosten der Kinder. Nicht umsonst empfahl Lagrange, dem jungen Cauchy solange kein Mathematikbuch in die Hand zu geben, bis er 17 Jahre alt geworden sei.
Bei dieser Sicht der Dinge kommt eher der Aspekt zum Tragen, daß die Genialität im Menschen vom Kindesalter an heranreift und daß sich dann das Genie mit Sicherheit entfalten kann. Das stimmt leider nicht, sondern es ist hier wie üblich in der Natur: Von 1000 Kindern mit genialer Begabung kommen vielleicht 3 Kinder in ihrem späteren Lebensweg dahin, auf dem Hauptgebiet ihrer genialen Begabung zu erschaffen – siehe Evariste Galois.

Mathematik der Römer und abschließende Betrachtungen zur Antike
Die Römer entwickelten ein eigenes Zahlensystem:

Zeichen	Bedeutung	Beispiele							
I	1	III	3						
V	5	IV	4	VI	6	VII	7		
X	10	IX	9	XI	11	XIV	14	XV	15
		XVI	16	XIX	19	XX	20	XXI	21
L	50								
C	100	IC	99	CI	101				
D	500								
M	1000								

Weitere Beispiele:

XMIII	993
MCM	1900
MCML	1950
MCMLX	1960
MM	2000

In der Bruchrechnung hatten sie sehr große Schwierigkeiten. Sie näherten die Brüche an solche an, die einen Nenner von 12 hatten.
Die Römer verwendeten viel das Rechenbrett (abacus).
In schwierigeren Fragen wandten sie sich an alexandrinische Gelehrte.

Hipparchos von Nikaia (180?-125? v.Chr.) baute die Trigonometrie der Ebene aus.

Menelaos von Alexandreia (um 100 n.Chr.) schuf die Anfänge für eine Trigonometrie auf der Kugeloberfläche.

Heron von Alexandreia (um 75 n.Chr.) überarbeitete die "Elemente" des Euklid und kümmerte sich erstmals um die negativen Wurzeln bei quadratischen Gleichungen.

Diophantos von Alexandreia (um 250) schrieb das Werk "Arithmetika" in 13 Büchern, von denen 6 erhalten sind. Er betrachtete erstmals lineare und quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten (Diophantische Gleichungen, Beispiel: $x^2 + y^2 = R$). Er machte einen großen Schritt in Richtung der heutigen Zahlentheorie und Algebra.

Pappos von Alexandreia (um 320 n.Chr.) verallgemeinerte den Lehrsatz des Pythagoras auf schiefwinklige Dreiecke und behandelte Extremwertaufgaben, Spiralen, Schraubenflächen und die Quadratix. Er kam bei der Berechnung der Volumina von Rotationskörpern zu Regeln, die den Guldin'schen Regeln entsprechen. Er verfaßte ein großes Werk "Synagoge" (Sammlung), in der er sein mathematisches Wissen zusammenfaßte.

Hypatia von Alexandreia (370?-415 n.Chr.), die Tochter des alexandrinischen Mathematikers Theon, ist als die erste Mathematikerin der Geschichte überliefert.

Zur Entwicklung der Mathematik im Abendland
Bis 900 n.Chr. war in Indien die Ziffer 0 für ein vollständiges dezimales Stellenwertsystem entwickelt worden, das bis 1200 n.Chr. von den Arabern übernommen wurde.

Bis 1500 wurde das mit arabischen Ziffern geschriebene Dezimalsystem im Abendland eingeführt, wobei es die römischen Zahlen verdrängte.
Die Araber übersetzten in ihrer kulturell-wissenschaftlichen Blütezeit die byzantinischen Werke in ihre Sprache und betrieben eigene Forschung, etwa von 800 bis 1200. Ihre wesentlichen Leistungen lagen auf den Gebieten von Arithmetik und Algebra, wobei diese Namen auch arabischen Ursprungs sind. Sie erstellten Tabellen für die trigonometrischen Funktionen sin, tan und cot. Da sie ebenso ausführliche astronomische Forschungen betrieben, gingen auch auf diesem Gebiet arabische Namen in die abendländische Wissenschaft über, wie z.B. der Sternname Algol.
Sehr viel des arabischen Wissens kam über das Kalifat von Cordoba in das Abendland. Das Kalifat bestand bis 1031, in Toledo hielten sich die Araber bis 1085.

Noch um 1550 waren die arithmetischen Fähigkeiten der durchschnittlichen Abendländer so gering, daß sie bei den Mayas erfahren mußten, daß die
- einen besseren Kalender und
- die besseren arithmetischen Fähigkeiten hatten.

Die eigenständige Forschung im Abendland begann etwa um 1100 n.Chr., als sich die Phase der Übersetzung der arabischen Schriften ihrem Ende näherte.

Leonardo aus Pisa (1180?-1250?), bekannt als Fibonacci, benutzte in seinem Buch Liber abaci (Das Buch des Abacus) von 1202 das arabische, von den Indern übernommene, Stellenwertsystem. Das Buch enthielt:
- Untersuchung von Problemen der Zahlentheorie bis zu irrationalen Zahlen.
- Definition der heute nach ihm benannten Fibonacci-Zahlen.
- Lösungsverfahren für kubische Gleichungen.

Einen Buchdruck gab es damals im Abendland noch nicht. Johannes Gutenberg (1400?-1468) erfand um 1450 den Buchdruck und bis 1480 wurden die ersten Mathematikbücher gedruckt. Fibonacci gab in seinem 2. Buch Practica geometriae (Praxis der Geometrie) von 1220 eine Einführung in die Geometrie und Trigonometrie der Araber.

Nicolas Oresme (1323?-1382) führte in Astronomie und Mathematik als ein sehr tiefer, eigenartiger Denker neue Gedanken ein. Mathematische Leistungen:
- Gebrochene Exponenten,
- Anfänge einer Parameterdarstellung von Kurven.

Er war Professor für Mathematik in Paris und förderte sehr das mathematisch naturwissenschaftliche Denken des Abendlandes.

Mit Beginn der Renaissance im Abendland um 1400 wurde das wesentliche hellenische Element wieder zum Leben erweckt, die Liebe zur Vernunft und Mathematik um ihrer selbst willen zu betreiben. Ferner bewirkten praktische Forderungen der Kaufleute, Seefahrer, Maler und anderer, daß die Rechenkunst ausgebaut und öffentlich gelehrt wurde.
Die Rechengehilfen der Kaufleute, die Cossisten, waren städtische Angestellte, die als Rechenmeister auch an den Schulen Unterricht erteilten. Ihr Stand hatte Ähnlichkeit mit der Kaste der Schreiber im antiken Ägypten.
Johannes Widmann aus Eger führte in seinem Buch von 1489 die Zeichen + und - für Addition bzw. Subtraktion ein. Bis dahin hatte man p für plus und m für minus geschrieben.

Adam Riese aus Staffelstein (1492-1559) leitete nebenamtlich eine Rechenschule und verfaßte mehrere Rechenbücher zwischen 1518 und 1550, die wegweisend für Jahrhunderte wurden. Er widmete sich besonders dem Rechnen auf den Linien, also dem Rechnen auf dem Rechenbrett, wie es die Cossisten lehrten. Das Rechenbrett hieß auch Abacus, vom griechischen Wort abax abgeleitet.

Michael Stifel aus Eßlingen (1487?-1567) gab 1544 ein Buch heraus, in dem er eigene Forschungsergebnisse veröffentlichte:
- Einführung auch negativer Koeffizienten für quadratische Gleichungen.

- Lösungen für Wurzeln bis 7. Grades.
- Einführung des Wortes "Binomialkoeffizient" und Bildung dieser Zahlen nach dem arithmetischen Zahlendreieck (Blaise Pascal-Dreieck).
- Einführung negativer Exponenten, wobei das Minuszeichen so benutzt wird, daß es die Umkehrung der Basis angibt: $(2/5)^{-2} = (5/2)^{2}$

Mit der Eroberung von Byzanz (Konstantinopolis, Byzantion) durch die Türken 1453 flohen viele byzantinische Gelehrte nach Italien. Durch ihre Hilfe wurden die italienischen Universitäten von Pisa, Bologna und Ferrara berühmt. Italienische Mathematiker widmeten sich besonders den Gleichungen bis 3. Grades, wobei sie schon für Koeffizienten Buchstaben verwendeten.
Niccolo Tartaglia (1500?-1557) und Geronimo Cardano (1501-1576) sind die bekanntesten Namen.
Italienische Maler erforschten die Gesetze der Perspektive, darunter das Genie Leonardo da Vinci (1452-1519), auch Ingenieur und Naturwissenschaftler.

Zur Eroberung von Byzanz durch die Türken:
Das Byzantinische Reich war aus dem Oströmischen Reich entstanden. Es überlebte den Fall von Westrom um fast 1000 Jahre. Gemäß den Gepflogenheiten dieser Zeit setzten die byzantinischen Kaiser oft ihre Flotten dazu ein, um wirtschaftliche Konkurrenten von einträglichen Handelsplätzen fern zu halten. Das mußte das aufstrebende Venedig schmerzlich erfahren und sie entwickelten die Venetianer einen großen Haß auf Byzanz.
Angeblich soll der 90-jährige Doge von Venedig aus Rache für den Tod seines Sohnes, den er den Byzantinern anlastete, die Anführer des letzten Kreuzzuges dazu überredet haben, vor dem Übersetzen ins Morgenland das reiche Byzanz auszurauben.
Die Kreuzritter, die geschworen und gelobt hatten, daß sie nur dem einzigen Gott, dem Kreuz, Jesus Christus und der Jungfrau Maria dienen wollten, wandten sich gegen das gut befestigte Byzanz und nahmen es mordend und raubend ein. Als der Papst davon erfuhr, belegte er sie alle mit dem Kirchenbann.
Von diesem schweren Schlag erholte sich Byzanz nicht mehr und erlangte nie mehr seine alte Kraft zurück. Auch so vergeht der Ruhm der Welt.
Auch in der Folge bekämpften sich noch Jahrhunderte später christliche Staaten untereinander, islamische Staaten untereinander, und dann auch kommunistische oder sozialistische Staaten untereinander ..., was der alten Tradition folgte, daß sich in der Antike Stämme der Gallier untereinander bekriegten, auch Stämme der Germanen untereinander, Stämme der Slawen untereinander, Stämme der Araber untereinander, auch Stämme der Indianer untereinander ... Der drohende Krieg der Sterne in der schon nahen Zukunft wäre die logische Fortsetzung davon – bei gleichbleibender Veranlagung der Menschen.

Nicolaus Cusanus (1401-1464) aus Cues an der Mosel gab ein neues Verfahren zur Berechnung der Kreiszahl π an.

Johannes Müller (1436-1476) aus Königsberg in Franken (Regiomontanus) gab Bücher über Trigonometrie mit genaueren Tafeln als bei den Arabern heraus. Sein Lehrer war Peurbach.

Christoph Clavius (1537-1612) war Mitglied des Collegium Romanum. Er gab Übersetzungen der Bücher des Euklid heraus und eigene mathematische Werke, die für Jahrhunderte als Lehrbücher dienten.

William Oughtred (1574-1660) führte bis 1652 das Wurzelzeichen „v " ein und verwendete das Zeichen "x" für die Multiplikation.

Harriot und Leibniz führten für die Multiplikation das Punktzeichen „·" ein.
Den Divisionsdoppelpunkt führte 1633 Johnson ein.
Thomas Harriot (1560-1621) führte ferner die kleinen lateinischen Buchstaben für Koeffizienten und Variablen ein, auch die Zeichen ">" und "<" für "größer als" und "kleiner als".
Descartes führte die hochgestellten Exponenten ein.
Newton benutzte einfache tiefer gestellte Indizes, Leibniz schon doppelte tiefer gestellte Indizes.

Robert Recorde (1510?-1558) führte das Gleichheitszeichen "=" ein.
Bürgi, Neper und Briggs hatten bis etwa 1600 die Logarithmen entwickelt.
Euler ordnete sie 1748 in das System der übrigen Rechenarten ein.

Bisher gab es kaum Beiträge von französischen Mathematikern. Die meisten Forschungen wurden von italienischen und deutschen Mathematikern durchgeführt.
Leonardo da Vinci verließ Italien im Jahre 1519 und zog, seiner Heimat entfremdet und beraubt, nach Frankreich, auf Einladung des französischen Königs, wie eine symbolische Handlung für den kulturellen Aufstieg Frankreichs und den kulturellen Abstieg Italiens.
Lagrange war italienischer und französischer Abstammung.
In Deutschland schafften es nur noch ganz wenige Forscher, sich mit viel Glück gegen die restaurativen Kräfte, den Terror von oben, durchzusetzen, wie Johannes Kepler, Gottfried Leibniz, Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauß.
Ähnliches galt für England, wo die von Wallis, Gregory, Brouncker, Barrow, Harriot und Newton betriebene Forschung durch die Kirche zunehmend behindert wurde.
Gleichzeitig mit Frankreich stiegen die Niederlande in der Mathematik auf.
Willibrord Snell (1580-1626), auch bekannt als Snellius, arbeitete auf den Gebieten Optik, Trigonometrie und Geometrie.

Francois Viete (1540-1603), bekannt als Vieta, widmete sich den algebraischen Gleichungen bis 3. Grades, der Trigonometrie und Geometrie. Er leistete Vorarbeiten für den Fundamentalsatz der Algebra über die Lösungen von algebraischen Gleichungen n-ten Grades.

Rene Descartes (1596-1650) und Pierre de Fermat (1601-1665) entwickelten die Analytische Geometrie.

Descartes betrieb wie Platon Wissenschaftstheorie über die Möglichkeit mathematischen Wissens. Er ging zu modernen mathematischen Darstellungen über:
- Die Kennzeichnung der unabhängig Veränderlichen (Variablen) in (algebraischen) Gleichungen mit x, y und z.
- Die Kennzeichnung von Koeffizienten in Gleichungen mit a, b und c.

Descartes (Cartesius) führte die Koordinatensysteme ein und definierte einen Punkt über ein Paar geordneter Zahlen (x,y).
Er formulierte die algebraischen Gleichungen für Kurven wie Ellipse und Parabel und schuf neue Funktionen durch willkürliche Wahl der Parameter in den algebraischen Gleichungen.
Er beschränkte sich auf 2 Dimensionen.
1619 entwickelte er das Konzept der Analytischen Geometrie.
Descartes schrieb in den Niederlanden an seinem Werk "Le Monde", das er aber aus Angst vor der Inquisition, in Kenntnis der Schicksale von Bruno, Vanini, Campanella und Galilei nie veröffentlichte.
Pater Mersenne, ein Jugendfreund von Descartes, leitete um diese Zeit wöchentlich stattfindende Dispute, aus denen sich die Französische Akademie der Wissenschaften entwickelte.
1637 veröffentlichte er seine Methode der Analytischen Geometrie.
Kardinal Richelieu hatte Descartes die Erlaubnis gegeben, alles veröffentlichen zu dürfen.

Pierre de Fermat (1601-1665) entwickelte
- unabhängig von Descartes die Analytische Geometrie,
- Anfänge der Differentialrechnung (Tangentenmethode, ein Teil der Infinitesimalrechnung oder des Calculus),
- die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung (zusammen mit Pascal).

Er leistete Bedeutendes in der Zahlentheorie (Arithmetik) bei Primzahlen, Diophantischen Gleichungen. Er las die Werke der großen griechischen Meister Euklid, Archimedes, Apollonios und Diophantos. Er stellte zur analytischen Darstellung von Kegelschnitten die Gleichungen 2. Grades mit 2 Unbekannten auf.
Fermat erfand den Begriff des Differenzenquotienten für eine Kurve und definierte damit die Steigung einer Sekante der Kurve, die sie in 2 Punkten schneidet. Er verlangte gewisse Ei-

genschaften der Stetigkeit der Kurve, damit beim Grenzübergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten der Begriff der Sekante bzw. Tangente sinnvoll bleibt.
Um 1629 hatte Fermat schon das Konzept der "Kurvendiskussion" eingeführt mit der Bestimmung der Minima und Maxima (Extremwerte) der Kurve über seine Differentialrechnug.
Aus der Forderung, daß der Lichtstrahl so verläuft, daß er trotz Brechung und Reflexion minimale Zeit benötigt, leitete er die Brechungs- und Reflexionsgesetze (Snellius'sche Brechungsgesetz) ab.
Die Analytische Geometrie wandte er auf 3 Dimensionen an.
"Letzter Satz des Fermat":
Es gibt keine natürliche Zahl, die die Gleichung $x^n + y^n = a^n$, für $n > 2$, erfüllt.

Eine Anzahl von Mathematikern vermutete, daß Gleichungen n-ten Grades n Wurzeln haben, aber erst Gauß erbrachte den Beweis dafür.
Viele Mathematiker beschäftigten sich mit Zahlenfolgen und Zahlenreihen, aber erst Cauchy gab strenge Konvergenzkriterien an.
Die Analytische Geometrie zeigte die Wichtigkeit der Erforschung der algebraischen Gleichungen, ferner wurden die Zahlenfolgen und -reihen erforscht.

Bonaventura Cavalieri (1598?-1647) schuf seine Indivisibeln-Geometrie mit der Approximation von ebenen Figuren durch parallele "Fäden" und von Körpern durch parallele "Platten".
Indivisibilis ist die lateinische Übersetzung von atomos, unteilbar. Sie machte aus dem Verfahren des Archimedes eine Philosophie.
Cavalieri gab die ersten Integrationsformeln an.

In England gab John Wallis die wesentlichen Forschungsimpulse. Er gab mehrere Bücher heraus (1656 bis 1685) über Arithmetik, Algebra und Analysis.
Er widmete sich besonders Zahlenfolgen und -reihen.

Nikolaus Mercator (1620-1687) widmete sich dem überaus wichtigen Gebiet der Potenzreihenentwicklung von Funktionen.

James Gregory (1638-1675) schuf den Begriff der Konvergenz von Folgen und Reihen und widmete sich dem Problem der Grenzwerte. Auch er führte Potenzreihenentwicklungen durch (s.u.).

Blaise Pascal (1623-1662) war ein Wunderkind auf dem Gebiet der Sprachen und der Mathematik. Er las im Alter von 12 Jahren die Elemente des Euklid.
Im Alter von 20 Jahren baute er die 2. Rechenmaschine der Menschheit.
Die 1. Rechenmaschine wurde von Wilhelm Schickard gebaut, die 3. von Leibniz, die 4. von Babbage. Die 5. von Konrad Zuse und die 6. von Howard Aiken leiteten ins Rechner-Zeitalter ab 1950 über.
Seine Hauptleistung lag in der Wahrscheinlichkeitstheorie und kombinatorischen Analysis, die er in Korrespondenz mit Fermat bearbeitete.
Er behandelte auch die seit 1501 bekannte Modekurve Zykloide, die die Raumkurve eines beliebigen Punktes eines auf einer Ebene abrollenden Kreises ist.
Sein Hauptfehler lag in seinem religiösen Wahn, der seinen elenden Tod bewirkte.

Isaac Barrow (1630-1677) widmete sich Tangenten- und Integrationsproblemen, sowie Zahlenfolgen und -reihen. Er war der Lehrer I. Newtons.

Isaac Newton (1643-1727) und Carl Friedrich Gauß (1777-1855) zählen mit Archimedes von Syrakus zu den größten Genies der Menschheit. Ihre Hauptwerke:
Newton: "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" von 1687 (Die mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie), "Optics" von 1704.
Gauß: "Disquisitiones Arithmeticae" von 1801 (Arithmetische Untersuchungen).

Leben, Werk und Wirken der großen Genies der Menschheit sind unbedingt genauer im Rahmen der Genieforschung zu studieren.

Isaac Newton entwickelte u.a.:
- die Differential- und Integralrechnung,
- das Gravitationsgesetz, die Himmelsmechanik, die moderne Optik,
- die axiomatisch gegründete und mathematisch formulierte Physik,
- das Spiegelteleskop.

Durch die Arbeiten von Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) u.a. wurde er in der Verwendung von Zahlenfolgen und Zahlenreihen eingeführt. Er arbeitete die Potenzreihenentwicklungen und die Theorie der Polynome aus.
Die Idee zur Differentialrechnung hatte Newton von Fermat bekommen.
Durch die Arbeiten von Cavalieri (1598-1647) kam er zur Integralrechnung.
Spezialfälle der Integralrechnung waren schon von dem Genie der Antike, Archimedes, im reichen Maße behandelt worden.
Newton entwickelte auch den Begriff der Differentialgleichung, in heutiger Schreibweise dargestellt als

$$F(x,y,y',y'',y''' ...) = 0,$$

d.h., daß in einer Gleichung x und y zusammen mit höheren Ableitungen von y nach x vorkommen.
Meistens beschränken sich die physikalischen Fälle auf Typen

$$F(x,y,y',y'') = 0,$$

und dann ist meistens noch y, y' oder y'' gleich Null, so daß eine Differentialgleichung vorliegen mag der Art

$$F(x,y',y'') = 0.$$

Die wenigsten Differentialgleichungen sind elementar (durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck) lösbar. Meistens sind sie nur über Reihenentwicklungen zu lösen.
Viele physikalische Probleme werden durch Systeme gekoppelter Differentialgleichungen beschrieben.

Newton entwickelte das Interpolationsverfahren:
Es gibt genau ein Polynom n-ten Grades, das an n+1 Stellen x_0, x_1 , .. ., x_n vorgegebene Werte y_0 , y_1 , ... , y_n annimmt:

$$y = y_0 + A(x-x_1) + B(x-x_1)(x-x_2) + C(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + ... ,$$

wobei A, B, C, ... Differenzenquotienten sind, die aus x_0 und y gebildet werden.

Gottfried Leibniz (1646-1716) erfuhr von der neuen Fluxionsrechnung Newtons, der aber nichts publiziert hatte. Darauf erfand Leibniz den Calculus völlig neu. Seine Definitionen und Schreibweisen wie „dx/dy“ oder das langgestreckte S (von Summe) „?“ als Integralzeichen wurden dann übernommen. Von Leibniz stammt auch der Begriff der Funktion y = f(x).
Christiaan Huygens (1629-1695) war der Lehrer von Leibniz gewesen. Gottfried Wilhelm Leibniz schuf auch die Kombinatorik und arbeitete die symbolische Logik aus. Auf ihm und Hermann Boole bauten Bertrand Russell und Alfred N. Whitehead ihre "Principia Mathematica" von 1911 auf. Leibniz widmete sich ferner der Potenzreihenentwicklung, der Lösung von Differentialgleichungen und aufeinanderfolgenden Differentiationen und Integrationen bei derselben Funktion. Er kannte schon Integralgleichungen.
1673 führte er der Royal Society in London seine Rechenmaschine vor, die die 4 Grundrechenarten beherrschte und Quadratwurzeln ziehen konnte. Pascals Maschine hatte nur addieren und subtrahieren können.
1700 gründete Leibniz die Berliner Akademie der Wissenschaften.
Bis 1704 hatten Leibniz, Jakob und Johann Bernoulli die Infinitesimalrechnung auf dem "Kontinent" eingeführt. Als Leibniz gestorben war, wurde er wegen Querelen mit dem Hannoveranischen Königshaus und Gelehrtenstreit nach Augenzeugenberichten "wie ein Hund verscharrt".
Auch das Grab von Johannes Kepler ist verschollen.

Die Notwendigkeit für einen guten Grenzwertbegriff:
Gegeben ist eine differenzierbare Kurve y = f(x).
Gesucht ist ihre Ableitung an der Stelle x. Wir ziehen eine Sekante durch die Kurve mit Schnittpunkten bei x und x + h. Läßt man nun h → 0 gehen, so wird aus der Sekante immer mehr eine Tangente an die Kurve bei x.
Nun könnte es sein, daß sich unterschiedliche Tangenten für verschiedene Arten, h → 0 laufen zu lassen, ergeben. Daß dies nicht so ist, wurde durch die Voraussetzung festgelegt, daß die Kurve differenzierbar ist.
Ein ähnliches Problem besteht bei der Integration. Schon Archimedes stand vor dem Problem, ob für verschiedene Zerlegungen in Segmente, Scheiben usw. sich verschiedene Flächen oder Volumina ergaben. Es müssen die Funktionen so ausgewählt werden, daß für verschiedene Zerlegungen immer dieselben Grenz werte herauskommen.

Jakob I. Bernoulli (1654-1705) wurde 1687 Professor für Mathematik in Basel. Seine Hauptwerke:
- Weiterentwicklung des Calculus und der Differentialgleichungen,
- wichtige Beiträge zur Analytischen Geometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Variationsrechnung.

Johann I. Bernoulli übernahm 1705 nach dem Tode seines Bruders dessen Professur in Basel. Auch er entwickelte den Calculus weiter und wandte ihn auf physikalische und technische Probleme an. Er verfaßte wie Francois Antoine de l'Hospital (1661-1704) die ersten Lehrbücher über Differential- und Integralrechnung (Calculus, Infinitesimalrechnung). L'Hospital als sein Schüler hatte seine Verdienste hauptsächlich in der didaktischen Aufbereitung des Lehrstoffs. 1698 behandelte Johann Bernoulli das Problem der geodätischen Linien auf konvexen Flächen.
Von 1720 an unterrichtete er Leonhard Euler.

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) behandelte Raumkurven und Flächen 4. Ordnung, Differentialgleichungen und geodätische Linien auf Drehflächen. 1736 beteiligte er sich an einer Expedition nach Lappland zur Feststellung der Gestalt der Erde.

Brook Taylor (1685-1731) formulierte die Reihenentwicklung von James Gregory neu und nach ihm wurde sie Taylor'sche Reihe genannt. Die Taylor'sche Reihe unterscheidet sich wesentlich von den bis dahin meistens üblichen Potenzreihenentwicklungen, da die Taylor'sche Reihe die Ableitungen der untersuchten Funktion in zunehmenden Ableitungen enthält.

James Gregory und (später unabhängig von ihm) Leibniz stellten die Potenzreihe auf für

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Leibniz setzte darin x=1 und erhielt eine Reihe für die Kreiszahl π.
Die Taylor'sche Reihe verwendet statt Potenzen von x die Ableitungen der Funktion f(x) an der Stelle x, um die Funktion an der Stelle x+h zu berechnen:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

mit dem Zeichen "!" für Fakultät: $2! = 1 \times 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3$, ...

Colin Maclaurin (1698-1746) behandelte einen Spezialfall der Taylorschen Reihe.

James Stirling (1692-1770) stellte eine Näherungsformel für n! für große natürliche Zahlen n auf (um 1730). Für sie sind verschiedene Versionen im Umlauf.

Leonhard Euler (1707-1783), wie die Bernoullis Schweizer, war überaus vielseitig und produktiv. Er verfaßte über 800 Abhandlungen über Arithmetik, Algebra, Analysis, Variationsrechnung, Theoretische Mechanik und Astronomie. Er studierte bei Jakob und Johann Ber-

noulli und bekam durch die Bernoullis 1727 eine Empfehlung an die Petersburger Akademie, wo er im Jahre 1730 Professor für Physik und 1733 für Mathematik wurde.
Er wurde von mehreren russischen Zaren unterstützt (u.a. Anna Iwanowna, Katharina die Große, Alexander).
In völliger Blindheit diktierte er seinen Kindern das Werk "Vollständige Anleitung zur Algebra", das 1770 erschien. Euler ordnete die vielen mathematischen Teilgebiete und vereinheitlichte viele systematisch unter höheren Gesichtspunkten. Seine Bücher über Mathematik hatten einen grundlegenden Einfluß für die zukünftige Entwicklung der Mathematik.
Laplace und Gauß betonten, daß Euler ihr maßgeblicher Lehrer gewesen war. Euler führte an Bezeichnungen ein:
- e für die Basis der natürlichen Logarithmen,
- 1736 gab er e als den Grenzwert der Folge $(1 + 1/n)^n$ für n → 8 an,
- i als die Kennung imaginärer Zahlen,
- π als Kreiszahl.

In seinen Büchern über Mathematik behandelte er u.a. die Zeta-Funktion in der Form eines unendlichen Produktes, auf die später Riemann zurückgriff, Raumkurven und Flächen 2. Ordnung. Dadurch wurde er zu einem der wichtigsten Wegbereiter der Differentialgeometrie.
Seine Beiträge umfassen u.a.:
- Lösung von Integralen und Differentialgleichungen.
- Die Euler'schen Integrale 1. und 2. Gattung.
- Elliptische Integrale (seit 1754).
- Zylinderfunktionen als Lösungen der Besselschen Differentialgleichung.
- Anwendung der Analytischen Geometrie und des Calculus auf die Mechanik.
- Diophantische Gleichungen, Primzahlen, Kettenbrüche (1737).
- Die Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- Die Moivre'sche Formel: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$
- Variationsrechnung (1744), Eulersche Differentialgleichung, Eulerscher Multiplikator (integrierender Faktor).
- Näherungslösung für die Mondbewegung, an der noch Newton gescheitert war.
- Die Rotation starrer Körper, Kreisel, Eulersche Winkel.
- Hydrodynamik und Strömungslehre.
- Versicherungs- und Rentenrechnung, Finanzmathematik.
- Er schrieb die Mathematiklehrbücher für die russischen Schulen, und allgemeine Lehrbücher für den Calculus (1748, 1755, 1768-1770).
- Er beriet das staatliche Vermessungsamt (Reform von Maßen und Gewichten und Eichung von Waagen).

Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) arbeitete hauptsächlich auf dem Gebiet der Theoretischen Mechanik, deren Prinzipien er mit Lagrange, Jacobi und Hamilton formulierte (ab 1743). Er gab die erste vollständige Lösung für die Präzession des Frühlingspunktes.
Er wurde ein Mäzen in der Mathematischen Physik und kümmerte sich um junge Talente, wie auch später Alexander von Humboldt (1769-1859).

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) gründete mit ehemaligen Schülern von sich die Akademie der Wissenschaften von Turin (um 1758). Er hatte mindestens einen italienischen Elternteil, sein italienischer Name war Lagrangia). Von 1766 bis 1786 (Todesjahr von Friedrich dem Großen) war Lagrange in Berlin. 1787 ging er auf Einladung von Ludwig XVI nach Paris und wurde dort von dem "modernen" Chemiker Lavoisier (1743-1794) in die Gesellschaft eingeführt. Lagrange überlebte die Französische Revolution von 1789, Lavoisier nicht. 1797 wurde die Ecole Polytechnique gegründet, und Lagrange wurde ihr erster Professor. Er entwarf die Lehrpläne für Mathematik.
Lagrange führte das Werk von Euler, die Analysis von Descartes und den Calculus auf die Mechanik anzuwenden, konsequent weiter. Er operierte geplant in einem 4D Raum mit 3 Raumkoordinaten und 1 Zeitkoordinate.
Sein Hauptwerk war die "Analytische Mechanik" von 1788, das er 1755 begonnen hatte. Legendre überarbeitete es für den Druck.

Einige weitere Leistungen von Lagrange:
- Einführung der Differentialrechnung in die Wahrscheinlichkeitstheorie.
- Theorie des Schalles als Longitudinalwelle.
- Theorie der schwingenden Saite.
- Theorie der Monddrehung als Lösung des 3-Körperproblems Sonne, Mond, Erde.
- Näherungslösung für das 6-Körper-Problem Sonne, Jupiter und die 4 galileischen Monde (1766).
- Abhandlung über das Dreikörperproblem, Störung des Mondes durch Kometen.
- Begriff des Potentials, den Laplace übernahm.
- Zahlentheorie (Primzahlen, Quadratzahlen, diophantische Gleichungen).
- "Über die Lösung numerischer Gleichungen" von 1767, wobei Lagrange ein Näherungsverfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen angab.
- Ausarbeitung des Maß- und Gewichtssystems nach der Revolution von 1789.
- "Theorie der analytischen Funktionen" von 1797 (Analysis und Calculus).
- "Vorlesungen über die Funktionsrechnung" von 1801.

Pierre Simon Laplace (1749-1827), später wegen seiner Verdienste geadelt:
- Begründung der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie (1820).
- Behandlung der Stabilität des Sonnensystems mit dem Netwonschen Gravitationsgesetz und dem Potentialbegriff.
- Aufstellung der nach ihm benannten Differentialgleichung.

Sein großes Werk "Himmelsmechanik" erschien in 5 Bänden von 1799 bis 1825.
1796 gab er das Buch "Darstellung des Systems der Welt" heraus, wobei er sie rein nach mechanischen Prinzipien zu erklären versuchte, mit der These der vollständigen Beschreibbarkeit abgeschlossener Systeme: Wenn zu irgendeinem Zeitpunkt alle Raum- und Impulskoordinaten aller Teilchen bekannt sind, können alle anderen Konstellationen in aller Zukunft vorausberechnet werden (Laplace'scher Dämon). Nach ihm war die Welt prinzipiell völlig erfaßbar und in ihrer Entwicklung prinzipiell völlig voraussagbar.
Auch Laplace förderte junge Talente.

Adrien Marie Legendre (1752-1833) entdeckte 1784 die nach ihm benannten Legendreschen Polynome. Er beschäftigte sich mit Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Ausführlich behandelte er Elliptische Integrale.
Ferner behandelte er geodätische Linien auf Drehflächen.

Gaspard Monge (1746-1818) erfand die Darstellende Geometrie, Grundlage des technischen Zeichnens, wo es das Problem ist, 3-dimensionale Körper eindeutig auf eine Ebene abzubilden. Das Verfahren eignet sich auch zur Darstellung gekrümmter Flächen.
Monge schuf eine Theorie zur Untersuchung der Krümmung von Flächen.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) beschäftigte sich mit
- der Lösung numerischer Gleichungen,
- der Theorie der Wärmeleitung, wobei er die Theorie der Randwertprobleme ausbaute, das Lösen von Differentialgleichungen für bestimmte Anfangsbedingungen (1807, 1812),
- der Vorform der harmonischen Analyse, die Fouriersche Analyse, die Approximation periodischer Vorgänge durch eine Superposition periodischer trigonometrischer Funktionen, die Fouriersche Reihe.

Fourier glaubte an die mathematische Erfaßbarkeit aller Naturerscheinungen.
Nach der Revolution gründete 1794 der Konvent die Ecole Normale.
Fourier bekam den Lehrstuhl für Mathematik mit der Auflage, keine langweiligen Vorlesungen zu halten, keine Notizen zu verwenden, die Vorlesungen stehend und im freien Austausch von Fragen und Antworten zu halten.

Jean Victor Poncelet (1788-1867) baute aus den Arbeiten von Desargues und Pascal, Monge und L.N.M. Carnot seine projektive Geometrie auf.
Als Begründer der projektiven Geometrie wird Girard Desargues (1591-1661) angesehen.

Lazare N.M. Carnot (1753-1823) erkannte als ihre Grundoperationen nur Projizieren und Schneiden an. Die projektive Ebene kennt wie die elliptische nichteuklidische Geometrie keine Parallelen.
- Lehrsatz der Kontinuität: Gewisse geometrische Eigenschaften von Figuren bleiben erhalten, wenn man die Figur auf irgendeine Weise projiziert. Invarianz von Eigenschaften bei Projektion - Invarianten (1822).
- Prinzip der Dualität der Sätze über Punkte und Geraden in der projektiven Ebene, die die Menge aller Punkte und Geraden der euklidischen Ebene enthält. Auf den 3D Raum angewandt werden in den Sätzen Punkte und Ebenen vertauschbar.
- Methode der Reziprozität.

Gauß, Abel und Cauchy brachten in die Mathematik wieder eine sehr viel größere Genauigkeit und Strenge bei der Beweisführung, wie ihre antiken Vorgänger Eudoxos, Eukleides, Archimedes und Apollonios.

Carl Friedrich Gauß (1777-1855) begründete (mit Wolfgang und Johann Bolyai sowie Lobatschewski, weitere Einzelheiten darüber folgen weiter unten) die antieuklidische oder auch nichteuklidische Geometrie.
Im Alter von 12 Jahren lernte er die Euklidische Geometrie kennen und schon bald darauf kamen ihm Zweifel, ob das Parallelenaxiom notwendig ist. Daraus entwickelte sich bei ihm allmählich seine Antieuklidische oder Nichteuklidische Geometrie, die er genauso geheim hielt wie ehemals Newton seine Fluxionsrechnung.
In seiner Doktorarbeit von 1799 brachte Gauß zum ersten Mal einen Beweis dafür, daß eine algebraische Gleichung n-ten Grades n reelle oder komplexe Lösungen hat (Fundamentalsatz der Algebra).
1801 erschienen die "Disquisitiones Arithmeticae" (Arithmetische Untersuchungen), in denen Gauß seine Forschungen über Zahlentheorie publizierte. Sein bedeutendster Schüler wurde Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1850), der in Paris studiert hatte und sich die "Disquisitiones" im Selbststudium aneignete.
Gauß entwickelte oder führte ein u.a. den Begriff der zahlentheoretischen Kongruenz sowie die Theorie der Kreisteilung.
Gauß gab als Erster einen strengen Beweis für das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste (Goldener Lehrsatz, theorema aureum).
Weiterhin beschäftigte er sich darin u.a. mit quadratischen Formen.

1781 hatte William Herschel (1738-1822) den Uranus entdeckt, und man suchte nach neuen Planeten. Giuseppe Piazzi (1746-1826) entdeckte am 1.1.1800 den Kleinplaneten Ceres, den er bald darauf wieder verlor.
Gauß berechnete seine Bahn und Olbers (1758-1840) fand ihn an der von Gauß angegebenen Stelle im Dezember 1802 wieder.
Gauß veröffentlichte 1809 seine "Theoria motus corporum celestium", in der er seine Theorie der Bewegung der Himmelskörper darlegte.

Alexander von Humboldt (1769-1859) wurde auf Gauß aufmerksam, in seinem Heimatland Deutschland fand Gauß aber sonst keine Resonanz.

Gauß widmete sich auch der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und teilte sie Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) mit.
1812 erforschte er die hypergeometrische Reihe, mit deren Hilfe heute wichtige Differentialgleichungen der Physik gelöst werden können.

Gauß entwickelte oder arbeitete ohne Publikation an den Theorien der
- analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen,
- Elliptischen Funktionen,
- Quaternionen (also vor Hamilton) und
- Nichteuklidischen Geometrie.

Gauß ist der Erfinder der komplexen Zahlenebene (Gauß'sche Zahlenebene).

In der Physik interessierten ihn am meisten Himmelsmechanik, Erdmagnetismus und Elektromagnetismus, Optik und Linsensysteme, Geodäsie.

Von 1821 bis 1829 beschäftigte er sich mit Landvermessung. Er war viel an gekrümmte Flächen interessiert - auf seinem Weg zur Differentialgeometrie.
Er erfand den Heliotropen, das Zweifaden-Magnetometer und mit Wilhelm Weber (1804-1891) den Telegraphen (1833). Weber erkannte 1835 die große zukünftige Bedeutung von Eisenbahn- und Telegraphennetzen.

Niels Henrik Abel (1802-1829), geboren in Findö in Norwegen, begann im Alter von 15 Jahren mit dem Selbststudium der Werke der großen Mathematiker und Naturforscher. Sein Lehrer war Bernt Michael Homboe (1795-1850).
1822 beendete er sein Studium an der Universität Kristiania und gab eine Arbeit heraus, die die Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades bewies, gedacht als Empfehlung an Mathematiker in Frankreich und Deutschland.
Abel und Evariste Galois (1811-1832) gehören zu den todunglücklichen Mathematikern, noch viel mehr als Bolyai und Cantor.

Wie Gauß und Cauchy widmete sich Abel der Einführung wissenschaftlicher Strenge in der mathematischen Beweisführung. Er fing mit einem Beweis für den verallgemeinerten binomischen Lehrsatz an und wandte sich dann unendlichen Reihen zu.
Er untersuchte besonders kommutative Gruppen, weshalb diese nach ihm benannt wurden, und stellte einige Sätze über Stetigkeit, Konvergenz und Grenzwerte auf.
Analog zu den einfach periodischen Funktionen wie Sinus und Cosinus definierte er doppeltperiodische Funktionen. Er erhielt sie unter Verwendung von komplexen Argumenten.
Durch Umkehrung elliptischer Integrale erhielt er die Elliptischen Funktionen. Auch Gauß hatte sie gefunden, aber nichts darüber veröffentlicht. Abel zeigte, daß sie als Quotienten unendlicher Produkte darstellbar sind. Weierstraß (1840), Hermite (1855) und Riemann (1857) schufen daraus die Theorie Abelscher Funktionen.
Abel widmete sich der algebraischen Gleichung 5. Grades, aber er versuchte auch zu ermitteln, welche algebraischen Gleichungen beliebigen Grades überhaupt lösbar sind und von einer gegebenen Gleichung sagen zu können, ob sie lösbar ist oder nicht.
In Heidelberg entwickelte Abel das Abelsche Theorem, eine Verallgemeinerung des Additionstheorems elliptischer Integrale.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) studierte an der Ecole Polytechnique und war dort ab 1816 als Professor für Mathematik tätig. Ab 1848 lehrte er an der Sorbonne. Er verfaßte Lehrbücher und etwa 800 Abhandlungen, wie Euler.
Einige seiner vielen bedeutenden Leistungen:
- Einführung strenger Beweisführung in die Analysis (reelle und komplexe). Strenge Fassung der Begriffe Stetigkeit, Konvergenz und Grenzwert. Formulierung von Konvergenzkriterien.
- Existenzbeweise für die Lösungen von Differentialgleichungen.
- Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen in der Funktionentheorie (Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen).
- Ausarbeitung der Kombinatorik.
- Abhandlung über Polyeder.
- Abhandlung über symmetrische Funktionen.
- Lösung von Integralen mit komplexen Zahlen als Integrationsgrenzen (1814), was Gauß 1811 schon erkannt hatte.
- Theorie der Ausbreitung von Wellen auf der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit unbegrenzter Tiefe, 1816.
- Publikation seiner Vorlesungen über Analysis als Buch 1821.
- 1826 bis 1835 Publikationen in eigenen Zeitschriften wie Leibniz, danach im Bulletin der Akademie.
- 1840 Prüfung der Berechnungen von Leverrier über den Kleinplaneten Pallas.
- Arbeiten in Elastizitätstheorie, Mechanik und Optik.
- Entwicklung der Gruppentheorie aus der Theorie der Permutationen und Substitutionen, ferner die Begriffe Untergruppe und Ordnung von Gruppen, Multiplikationstafeln (Cayley 1854).

Die Theorie der endlichen diskontinuierlichen Gruppen spielt in der Theorie der algebraischen Gleichungen eine große Rolle, und die Theorie der unendlichen kontinuierlichen Gruppen in der Theorie der Differentialgleichungen.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) lernte bewußt direkt aus den Werken der großen Meister Euler und Lagrange Algebra, Zahlentheorie und Calculus. Auch Riemann lernte aus den Werken der großen Meister.
Jacobi studierte von 1821 bis 1825 in Berlin, promovierte 1825 und lehrte danach die Anwendung des Calculus auf räumliche Kurven und gekrümmte Flächen.
1826 veröffentlichte Jacobi eine Arbeit über Zahlentheorie, 1829 sein großes Werk über elliptische Funktionen, wobei er die Theta-Funktionen einführte.
Danach beschäftigte er sich mit der algebraischen Gleichung 5. Grades wie Abel.
Elliptische Funktionen führen auf das Gebiet der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, deren Grundlagen Gauß, Abel, Jacobi und Cauchy schufen.
Dirichlet, Riemann und Weierstraß entwickelten daraus die Theorie der Funktionen mit einer komplexen Veränderlichen, die Funktionentheorie.
Die Elliptischen Integrale - meist nicht elementar lösbar - teilt man in 3 Gattungen ein.
Jacobi arbeitete auch mit Abelschen Funktionen (elliptischen Funktionen 5. Grades), die durch die Umkehrung eines Abelschen Integrals entstehen.
Bei dem Versuch, elliptische Integrale mit Polynomen ab 5. Grad umzukehren (hyperelliptische Integrale), führte Jacobi Funktionen in zwei Variablen und mit 4 Perioden ein.

Jacobi leistete wie Hamilton einen großen Beitrag zur formalen Vollendung der Theoretischen Mechanik (Hamilton-Jacobi-Differentialgleichungen).
Ferner entwickelte er die geläufige Determinantenschreibweise, die ebenfalls in der Physik viel Verwendung findet.

Ab 1844 wirkte er in Berlin.

Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) wurde 1829 Professor für Mathematik in Berlin wie Jacobi und 1855 Nachfolger von Gauß in Göttingen. Er arbeitete auf den Gebieten Arithmetik und Analysis.
Er lehrte die "Disquisitiones Arithmeticae" von Gauß und baute sie weiter aus.
In der Analysis arbeitete er auf dem Gebiet der Fourier-Reihen: Reihen mit einer komplexen Variablen und Variationsrechnung.

William Rowan Hamilton (1805-1865), geboren in Dublin in Irland, war ein Wunderkind und wurde der größte Mathematiker Irlands. Im Alter von 13 Jahren beherrschte er 13 Sprachen.
1817 begann seine Hinwendung zur Mathematik.
Er lernte das amerikanische Wunderkind Zerah Colburn (1804-1839, sehr guter Kopfrechner) kennen.
1823 begann Hamilton sein Studium am Trinity-College in Cambridge, 1827 wurde er Professur für Astronomie und Leiter der Sternwarte von Dunsink.
Hamilton arbeitete in der Optik mit Strahlensystemen (ab 1822) jeder Art, von einer Lichtquelle ausgehende Strahlen, durch Spiegel reflektierte oder durch Linsen gebrochene. Er stützte sich auf Fermatsches Prinzip und Variationsrechnung (Publikation 1828).
Hamilton versuchte, Optik und Dynamik zusammenzuführen.
Er brachte die Grundgleichungen der Dynamik auf die kanonische Form. Ferner versuchte er, die Gesetze der Optik und Dynamik aus der Variationsrechnung zu ermitteln.
1835 gab er ein Buch über das Rechnen in geordneten Zahlenpaaren heraus.
Hamilton machte die Voraussage der konischen Brechung in biaxialen Kristallen, wo aus einem einfallenden Strahl eine unendlich große Anzahl von Strahlen in Form eines Kegels gebrochen wird (durch Humphrey Lloyd experimentell bestätigt).
1837, kurz bevor er geadelt wurde, entwickelte er die Quaternionen. Hamilton wollte eine Algebra erfinden, die für Rotationen im 3D Raum dasselbe leisten sollte, was die komplexen Zahlen für Rotationen im 2D Raum leisten, wobei die Räume euklidisch sind. Ab 1853 publizierte er über Quaternionen. Gauß hatte sie schon entwickelt, aber nicht publiziert.

Hamilton entdeckte, daß bei seinen Quaternionen das Kommutativgesetz nicht allgemein gilt (1843). Wenn man z.B. 3D Vektoren in der Art des inneren Vektorprodukts multipliziert, ist das Ergebnis auch abhängig von der Reihenfolge der Vektoren. Aus diesem Zweig entstand die Vektor-Analysis. Sie wurde zusammen mit den Quaternionen durch die Tensor-Analysis ab 1900 ersetzt. Hamilton wandte die Quaternionen auf Dynamik, Astronomie und Wellentheorie des Lichtes an.

Ein Beispiel (auch für die Tensorrechnung anwendbar) für ein Vektorfeld:
Man zeichne auf eine Gummihaut einen Kreis, auf dem man etliche Punkte markiert. Wenn man nun die Gummihaut dehnt, wird meistens aus der Kreisform eine unregelmäßigere Form. Die vorhin auf den Kreis gemalten Punkte haben nun andere Positionen, und ihre Entfernung zu ihren früheren Positionen können als Maß der angelegten Spannkraft genommen werden, und ihre Richtung zu den früheren Positionen ist die umgekehrte Richtung der wirkenden Kraft. Damit ist für jeden Punkt auf der Gummihaut ein bestimmter Vektor gegeben nach Betrag und Richtung, der die an diesem Punkt einwirkende Kraft definiert, und damit ein Vektorfeld, durch einen Spannungstensor beschreibbar.

Ferdinand Moebius (1790-1868) führte die kollinearen Abbildungen ein und entdeckte die Raumkurven 3. Ordnung. Für Flächen- und Rauminhalte führte er Umlaufssinn und Vorzeichen ein und veranschaulichte sie mit Hilfe des einseitigen Moebius-Bandes.

Julius Plücker (1801-1868) arbeitete in der projektiven Geometrie und führte die homogenen projektiven Koordinaten ein, wodurch die projektive Ebene auf ein System reeller Zahlenpaare abgebildet wurde. Er wurde Professor für Mathematik in Bonn und bildete eine erhebliche Anzahl großer Mathematiker aus, darunter Felix Klein.

Von 1200 bis 1630 spielten deutsche und italienische Mathematiker und Forscher die größte Rolle. Von 1630 bis 1730 führte England auf dem Gebiet der Mathematik, danach Frankreich bis 1830, danach Deutschland bis 1945, danach die USA ...
Die Erklärung dafür könnten die Lebenswege der Genies liefern.
Evariste Galois (1811-1832) war von Pech und Bosheit der Menschen verfolgt, leistete aber in seinem kurzen Leben Erstaunliches. Hermite, Abel und Henri Poincare hätte beinahe ein ähnliches Schicksal ereilt.
Galois verfaßte eine Schrift über die allgemeine Lösung algebraischer Gleichungen - die Galois'sche Theorie. Er lieferte die Lösung des Problems, wann eine algebraische Gleichung lösbar ist. Dies führte ihn zum Ausbau der von Cauchy 1815 begonnenen Gruppentheorie. Er definierte Begriff und Eigenschaften von Gruppen und untersuchte speziell endliche Gruppen. Er erkannte schon die Bedeutung der Rationalitätsbereiche (Körper).
Liouville arbeitete den wissenschaftlichen Nachlaß von Galois durch und veröffentlichte einiges davon 1846.
Enrico Betti (1823-1892) gab 1852 eine geschlossene Darstellung der Galois'schen Theorie. Erst durch die Arbeiten von Camille Jordan (1838-1922), Felix Klein (1849-1925) und Marius Sophus Lie (1842-1999) wurde sie den Mathematikern erschlossen.

Arthur Cayley (1821-1895) gehörte mit Euler und Cauchy zu den produktivsten Mathematikern. 1838 begann er mit dem Studium der Mathematik am Trinity College in Cambridge. Er war auch sehr sprachbegabt.
1863 wurde er Professor, ab 1850 arbeitete er mit James Joseph Sylvester (1814-1897) zusammen u.a. auf den Gebieten:
- Theorie der Invarianten (mit Sylvester),
- analytische Geometrie des n-d Raumes,
- ebene Kurven, elliptische Funktionen, die Matrizen,
- Invariantentheorie quadratischer Formen.

Zur Theorie algebraischer Invarianten (Lagrange, Gauß, Boole waren die Vorläufer): Boole hatte 1841 festgestellt, daß analog zur Diskriminante quadratischer Gleichungen alle algebraischen Gleichungen Diskriminanten haben, die gegenüber Transformationen invariant

sind. Er entdeckte, daß es noch weitere gegenüber Transformationen invariante Ausdrücke gibt, die aus den Koeffizienten der Gleichung gebildet werden.
F.M.G. Eisenstein (1823-1852) entwickelte diese Theorie der Invarianten und Kovarianten weiter.
Cayley gab allgemeine Methoden an, um solche invarianten Ausdrücke zu finden.
Gegenüber linearen Transformationen ist z.B. die Reihenfolge der Punkte auf Kurven, Schnittpunkte von Kurven und Knoten in Kurven invariant.
Cayley vereinigte die metrische und die projektive Geometrie unter einem höheren Aspekt.
In der projektiven Geometrie - von Desargues, Pascal und Poncelet geschaffen - sucht man nach den Eigenschaften von Figuren, die bei Projektionen erhalten bleiben. Durch Einführung imaginärer Koordinaten machte Cayley die Verfahren der projektiven Geometrie für die metrische Geometrie anwendbar.
1858 verfaßte Cayley eine Arbeit über die Verknüpfung von linearen Transformationen, z.B. die Hintereinanderausführung von Transformationen bei einer Gleichung 2. Grades. Dabei überprüfte er das Verhalten der Diskriminanten und anderen Invarianten.
Dabei entwickelte er die Matrizen und ihre Algebra, die wie die der Quaternionen nichtkommutativ ist. Er erweiterte die analytische Geometrie auf der Basis des Matrizenkalküls auf n Dimensionen (1858).

Sylvester war wie Cayley sehr begabt in Sprachen und Mathematik. Er wurde 1838 Professor für Naturphilosophie am University College in London, ab 1855 wurde er Professor für Mathematik am Gresham College in London.
Sylvester arbeitete mit Cayley die Theorie der Invarianten aus. Er prägte die Begriffe invariant, kovariant, kontravariant und kogradient.
1851 entwickelte er die Theorie der Elementarteiler.
Er beschäftigte sich mit algebraischen Formeln, die lineare, quadratische, kubische usw. Potenzen von x und y enthalten, und suchte bei ihnen In- und Kovarianten.
Er entdeckte und entwickelte die Theorie der kanonischen binären Formen für ungerade Potenzen und z.T. auch für gerade.
1878 gründete er das "American Journal of Mathematics" für die mathematische Forschung.

Bernhard Riemann (1826-1866) studierte bei Steiner, Eisenstein, Jacobi und Dirichlet.
Er habilitierte sich 1854 in Göttingen und wurde 1859 der Nachfolger von Dirichlet.
In seiner Doktorarbeit von 1851 formulierte er die Grundlagen der schon von Gauß behandelten Funktionentheorie, wobei er der analytischen Darstellung (z.B. den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen) eine geometrische Deutung hinzufügte.
Später behandelte er die von Euler eingeführte Zeta-Funktion.
Durch die nach ihm so genannten Riemannschen Fläche wurden topologische Aspekte in die Analysis eingeführt.
In seiner Habilitationsschrift von 1854 behandelte er das Problem der Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, wie es z.B. bei Fourier-Reihen auftritt. Darin gab er eine stetige Funktion an, die keine Ableitung besitzt.
Er definierte das bestimmte Integral als Grenzwerte der Ober- und Untersummen (Riemann-Integral, R-Integral).

Henri Lebesgue (1875-1941) wählte die Intervalleinteilung nicht auf der x-Achse, sondern baute auf Mengenlehre und Maßtheorie auf. Hilfsweise kann man sich vorstellen, daß man beim Lebesgue-Integral oder L-Integral die Intervalleinteilung auf der y-Achse vornimmt.

Von 1857 bis 1859 behandelte Riemann Abelsche Funktionen und elliptische Modulfunktionen.
Er untersuchte lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung, deren Koeffizienten algebraische Funktionen sind. Die Abelschen Integrale ergaben sich als Spezialfall dieser Differential-Gleichungen.

In seinem Habilitationsvortrag von 1854 entwickelte Riemann das Konzept der nD Räume und topologischen Mannigfaltigkeiten mit nichteuklidischer Metrik, die durch quadratische bzw. biquadratische Differentialformen definiert wird. Er schuf eine Verbindung zwischen diesen Räumen und unserem realen Raum sowie mit den physikalischen Erscheinungen.

Riemann schuf somit die Nichteuklidische Geometrie der nD Räume.
Durch die Verknüpfung metrischer Strukturen mit physikalischen Phänomenen wurde er zu einem Vorläufer Albert Einsteins und vieler SF-Autoren danach, aber während Gauß und Riemann physikalische Eigenschaften des realen Raumes oder unsere Physik auf Krümmungen, Verzerrungen, Unebenheiten ... des realen *Raume*s zurückführten (wie auch William Kingdom Clifford), machte das Einstein mit der 4D *Raumzeit*.
Einstein zeigte zudem, daß Bahnen, die wir wahrhaftig mit unseren eigenen Augen sehen, wie z.B. die Flugbahn eines geworfenen Balls, für einen frei fallenden Körper, der mit dem Ball fällt, als Gerade erscheint, und das ebenfalls mit eigenen Augen gesehen.

Karl Wilhelm Theodor Weierstraß (1815-1897) arbeitete in Bonn die Werke einiger Meister durch, besonders die Himmelsmechanik von Laplace.
1839 begann er an der Hochschule mit dem Mathematikstudium. Sein Lehrer Christoph Gudermann (1798-1852) weckte in ihm das Interesse für Potenzreihen. Gudermann versuchte, die elliptischen und sonstigen Funktionen in Potenzreihen aufzulösen.
Während seiner Zeit als Gymnasiallehrer studierte Weierstraß intensiv Abel.
1841 schrieb er eine Abhandlung über analytische Funktionen und gelangte selbständig zum Integralsatz von Cauchy, den Gauß 1811 gefunden hatte.
Darauf veröffentlichte er eine Arbeit über analytische Faktorielle, 1849 eine Arbeit über hyperelliptische Integrale.
Ab 1856 war Weierstraß Professor für Mathematik und baute eine fähige Forschergeneration auf. In Fortführung von Gauß, Cauchy und Abel bemühte er sich um größte wissenschaftliche Strenge.

Er lernte Pafnutij Tschebyschew (1821-1894) aus Rußland kennen, der auf den Gebieten Zahlentheorie und Analysis arbeitete und u.a. lieferte:
- 1852 Beweis eines Satzes über Primzahlen.
- Tschebyscheff-Polynome.

Weierstraß begründete auf analytischem Wege die Funktionentheorie, hauptsächlich beschäftigte er sich aber mit Zahlentheorie und Abelschen Funktionen (dem Satz von Abel und Jacobi über mehrfach periodische Funktionen mit mehreren Veränderlichen).
1848 verfaßte er eine Arbeit über Abelsche Integrale, 1854 in Crelles Journal eine Arbeit über Abelsche Funktionen.
Er führte die Arithmetisierung der Analysis durch. Er gründete sie auf die natürlichen Zahlen, führte die irrationalen Zahlen auf die natürlichen Zahlen zurück, ebenso die Begriffe von Grenzwert und Kontinuität, ausgehend von Eudoxos von Knidos (wie Dedekind).
Seine Theorie der irrationalen Zahlen entwickelte er aus den Begriffen
- Grenzwert und Kontinuität sowie
- Konvergenz, Intervallschachtelung und Approximation von irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen.

Er entwarf eine stetige Kurve, an die in keinem Punkt eine Tangente angelegt werden kann.
Er beschäftigte sich mit Potenzreihen mit reellen oder komplexen Koeffizienten und Variablen als Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen.
Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) führte ab 1892 seine Arbeiten in Berlin weiter.

Augustus de Morgan (1806-1871) war ab 1828 Professor für Mathematik in London und bearbeitete u.a. die Symbolische Logik, den späteren Logikkalkül. Er stellte die nach ihm benannten "de Morgan"-Regeln (siehe Boole'sche Algebra, weiter unten) auf.

Aristoteles hatte mit dem Versuch zur Formalisierung der Logik um 334 v.Chr. angefangen. Leibniz hatte um 1672 sein Werk fortgeführt, wobei er seine mathematischen Arbeiten dazu verwendete, eine Rechenmaschine zu bauen, und er kannte bereits die Vorteile des binären Zahlsystems (Dyadik in seiner Terminologie).
Boole wandte sich extensiv diesem Gebiet der symbolischen oder formalen Logik zu. Sein Werk geriet für einige Jahrzehnte in Vergessenheit, bis Whitehead und Russel um 1910 seine Bedeutung erkannten.

George Boole (1815-1864) studierte einige Werke der großen Meister, vor allem Laplace. 1849 wurde er Professor für Mathematik am Queen's College in Cork in Irland.
Leistungen und Publikationen:
- Eine Arbeit über Variationsrechnung.
- Entdeckung der Invarianten, die Cayley und Sylvester später ausbauten.
- Trennung der Algebra von der Arithmetik und Gründung der modernen Algebra als abstraktes System durch die Arbeiten von Peacock (1830, "Abhandlung über Algebra"), Herschel, De Morgan, Babbage, D.F. Gregory (er gründete 1837 das "Cambridge Mathematical Journal", in dem Boole veröffentlichte) und Boole.
- Trennung der Symbole für mathematische Operationen von den Dingen, auf die sie wirken, Untersuchung dieser Operationen, Untersuchung der Verknüpfungen zwischen Operationen, ob sie wieder eine Algebra bilden,
- Angliederung der Logik an die Algebra (Vorläufer: Leibniz, De Morgan),
- "Die mathematische Analysis der Logik" von 1847, über das De Morgan auf Boole aufmerksam wurde.
- "Die Gesetze des Denkens", 1854. In diesem Werk stellte er die später nach ihm benannte Boole'sche Algebra als geschlossenes System vor. Sie ist ein Modell einer zweiwertigen Aussagenlogik.

Ernst Schröder (1841-1902) entwickelte die Algebra der Logik ab 1890.

Gottlieb Frege (1848-1925), Professor für Mathematik in Jena, gab ab 1879 mehrere Bücher heraus, in denen er die Begründung oder Ableitung mathematischer Sätze oder ganzer Gebiete wie der Arithmetik mit einer von ihm entwickelten symbolischen Schrift formallogisch durchführte.
Erst durch Bertrand Russell (geb. 1872) und Alfred N. Whitehead (1861-1947) mit ihrem Werk "Principia Mathematica" von 1910 bis 1913 wurden die Arbeiten von Boole und Frege erschlossen.
Kurt Gödel (geb. 1906) zeigte aber um 1931, daß der Symbolischen Logik Grenzen gesetzt sind, wie es von Poincare vermutet worden war. Eine Gründung der Mathematik auf die symbolische Logik ist nicht möglich, weil sie den intuitiven Charakter der Mathematik nicht erfaßt. Je mehr man sich den Grundlagen der Mathematik und der mathematischen Systeme nähert, um so mehr versagt die Logik.

Joseph Liouville (1809-1882) wurde 1833 Professor an der Ecole Polytechnique und arbeitete auf dem Gebieten der transzendenten Zahlen, Differentialgeometrie und elliptischen Funktionen.
Er bewies 1840, daß die transzendente Zahl e nicht Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann, und 1841, daß gewöhnliche Differentialgleichungen in der Regel nicht durch Quadraturen gelöst werden können.

Charles Hermite (1822-1901) kam mit 18 Jahren auf die Schule Louis-le-Grand, wo Evariste Galois 15 Jahre vorher gewesen war. Beinahe hätte er das Schicksal von E. Galois geteilt.
Hermite lernte aus den Werken der Meister Lagrange und Gauß, Euler und Laplace.
Hermite beschäftigte sich mit Abelschen Funktionen und lernte Joseph Liouville als Herausgeber des "Journal des Mathematiques" kennen.
Er schrieb eine Abhandlung über elliptische Funktionen mit 2 Veränderlichen und 4 Perioden (Abelsche Funktionen), 1847 über Zahlentheorie.
Gauß wandte sich um 1800 an französische Mathematiker, Galois und Hermite ab 1830 an deutsche.
1869 wurde Hermite Professor an der Ecole Normale und 1 Jahr später kam er an die Sorbonne. Seine Arbeiten waren u.a.:
- Algebraische Gleichungen mit s Veränderlichen und n-ten Grades.
- Er brachte den Begriff der konjugiert komplexen Zahlen auf. Zu der komplexen Zahl a + bi ist die konjugiert komplexe Zahl a - bi.
- Theorie der algebraischen Invarianten.

- Eine Abhandlung über die allgemeine Gleichung 5. Grades von 1858, die er unter Einführung elliptischer Modulfunktionen löste. Andere Mathematiker wurden dadurch angeregt, dasselbe Verfahren für Gleichungen n-ten Grades zu verwenden.
- Beweis der Transzendenz der Zahl e im Jahre 1873. Transzendente Zahlen sind solche, die keine Lösungen algebraischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten sind. Man kann transzendente Zahlen durch geeignete Reihen approximieren oder "definieren" (siehe den Streit Kronecker-Cantor). Ferdinand Lindemann bewies 1882 die Transzendenz der Kreiszahl π (pi).
- Zusammenfassung der Theta-Funktionen Jacobis zu einer Theta-Funktion.

Ernst Eduard Kummer (1810-1893) promovierte 1831 und wurde zuerst Lehrer. Kronecker wurde einer seiner Schüler. 1842 wurde er an die Universität Breslau und 1855 an die Universität Berlin berufen.
Er arbeitete hauptsächlich auf den Gebieten von Zahlentheorie, Analysis, Geometrie (Kummersche Flächen 4. Ordnung (Grades) im 4D Raum von 1860) und Angewandte Physik. Weitere Themen:
- Publikationen zum Letzten Satz des Fermat für $3 < n < 100$), mit besonderer Betonung für die Fälle, wo n eine Primzahl ist.
- Weiterführung der Gaußschen Arbeiten über die biquadratische Reziprozität (kubische und biquadratische Reste 1842-1848).
- Studium der hypergeometrischen Reihen und Hamiltons Arbeiten über Strahlensysteme.

Er schrieb 1845 eine Abhandlung "Über komplexe Einheiten", in der er die "idealen" Zahlen einführte, um den Letzten Satz von Fermat zu beweisen.
"Letzter Satz des Fermat":
Es gibt keine natürliche Zahl, die die Gleichung $x^n + y^n = a^n$, für $n > 2$, erfüllt.
Darin bezog er sich auch auf das Gaußsche Problem zur Teilung eines Kreisumfanges in n Teile, und er befaßte sich mit den zugehörigen algebraischen Zahlkörpern, für die er durch Einführung der idealen Zahlen die Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Arithmetik wiederherstellte.
Der Fundamentalsatz der Arithmetik (von Fermat): Jede natürliche Zahl ist nur auf eine Weise als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Leopold Kronecker (1823-1891) begann 1841 das Studium an der Universität Berlin.
Eisenstein studierte mit ihm, Dirichlet, Jacobi und Steiner wurden seine Lehrer.
Seine Dissertation von 1845 behandelte die Teilbarkeit algebraischer ganzer Zahlen (verwandt mit der Zerlegung in Primzahlen: Primfaktorzerlegung) in einem algebraischen Zahlkörper n-ten Grades, ein Problem der Zahlentheorie.
Algebraische Zahlen sind Lösungen (Wurzeln) von algebraischen Gleichungen n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten. Aus einer algebraischen Zahl kann ein algebraischer Zahlkörper erzeugt werden.
Bei der Lösung stützt man sich auf den Fundamentalsatz der Arithmetik von Fermat, der aber nicht für alle algebraische Zahlkörper gilt.
Arbeitsschwerpunkte von Kronecker waren auf den Gebieten der Elliptischen Funktionen, Vervollständigung und Erweiterung der Galois'schen Theorie algebraischer Gleichungen, irrationalen Zahlen und Kontinuität, Zahlentheorie (ausgehend von Zenon) und des Bezugs auf das Endliche.
1858 gab er die Schrift heraus "Über die Lösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades", worin er die Galois'sche Theorie und die elliptischen Funktionen verwendete,
1861 publizierte er wieder darüber, nun unter Benutzung der Abelschen Lösung durch Radikale.
Er studierte die Gaußsche Theorie der binären quadratischen Formen, worin die ganzzahligen Lösungen algebraischer Gleichungen 2. Grades mit 2 Veränderlichen gesucht werden.
Weierstraß wollte seine Analysis darauf aufbauen, daß die irrationalen Zahlen unendliche Folgen rationaler Zahlen sind.
Gegen dieses Vorhaben wandte sich Kronecker, und ebenso gegen Eodoxos von Knidos.

Weierstraß sprach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... ein eigenständiges Dasein zu, aber nicht den Quadratwurzeln aus 2, 3, 5, ... , also den irrationalen Zahlen. Er gab ein neues Verfahren zur Definition imaginärer Zahlen an.
Weierstraß und Dedekind führten zur modernen Analysis mit
- der kritisch-logischen Strenge von Gauß, Abel und Cauchy,
- Infinitesimalrechnung, Theorie der Funktionen mit reellen Veränderlichen bzw. mit einer komplexen Veränderlichen.

Weierstraß und Riemann führten die Arbeiten von Gauß, Abel und Jacobi über mehrfach periodische, elliptische und Abelsche Funktionen weiter.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) wurde wie Gauß in Braunschweig geboren und begann 1850 an der Universität Göttingen das Studium der Mathematik. Er hatte als Lehrer Carl Friedrich Gauß für höhere Arithmetik, Methode der kleinsten Quadrate und höhere Geodäsie, und Wilhelm Weber für Experimentalphysik.
Seine Doktorarbeit schrieb er über Eulersche Integrale.
1854 wurde Dedekind Privatdozent in Göttingen, gleichzeitig hörte er Vorlesungen von Riemann. Er wurde dessen erster Biograph.
1862 wurde er Professor an der höheren technischen Lehranstalt in seiner Heimatstadt Braunschweig, wo er 50 Jahre lang lehrte.
Er gab das Buch von Dirichlet über Zahlentheorie heraus, und in diesem gab er auch seine eigene Theorie der algebraischen Zahlen an. Er definierte die Gruppen durch Postulate und erkannte die große Bedeutung der Gruppen für Algebra und Arithmetik.
Weiterhin arbeitete er über Abel'sche und Modulfunktionen sowie Reelle Analysis (1858). Sein Hauptwerk war die Theorie über irrationalen Zahlen, in der er den nach ihm benannten Dedekindschen Schnitt einführte ("Kontinuität und irrationale Zahlen" von 1872), die moderne Formulierung der Lehre des Eudoxos. Daraus ergab sich die Forderung nach einer Theorie des Unendlichen.
Er leistete eine Erneuerung der Arithmetik durch seinen Bezug zum Unendlichen, den Idealen (die unendliche Klassen von Zahlen darstellen), und schuf die Begriffe des Ideals und Hauptideals. Er ersetzte die algebraischen Zahlen durch ihre Primideale. Ein Primideal kann nur auf eine Weise in Primideale zerlegt werden.
Damit gilt der Fundamentalsatz der Arithmetik für alle algebraischen Zahlkörper.

Georg Cantor (1845-1918) wurde in St. Petersburg als Sohn dänischer Eltern geboren.
Er promovierte 1867 über ein Thema aus der Gaußschen Zahlentheorie.
1872 wurde er außerordentlicher Professor für Mathematik an der Universität Halle an der Saale und 1879 ordentlicher Professor.
1831 hatte sich Gauß gegen die aktuelle Auffassung von unendlichen Größen gewandt. 1866 warf Cantor den Mathematikern vor, die sich dem Unendlichen nähernden Zahlen, wie bei der Folge 1/x mit x → 0, mit der Größe Unendlich zu verwechseln:
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen, aber keine natürliche Zahl mit dem Wert unendlich.
1874 gab Cantor eine Abhandlung über die Theorie unendlicher Reihen heraus, in der er den aktuellen Begriff vom Unendlichen angriff, der den Problemen von Kontinuität, Grenzwerten und Konvergenz zu Grunde liegt.
Von 1874 bis 1897 schuf er die Mengenlehre und publizierte regelmäßig darüber.
Ferner schuf er eine neue Theorie der Irrationalzahlen, auf Cauchy auf bauend.
Cantor machte "plausibel", daß die Menge aller natürlichen Zahlen genauso viele Zahlen hat wie die Menge aller algebraischen Zahlen (daß also ihre Kardinal zahlen gleich sind). Danach sind die algebraischen Zahlen abzählbar.
Die Definition der Kardinalzahl stammt von Frege, der von 1893 bis 1903 zwei Bücher veröffentlichte über die "Grundgesetze der Arithmetik", in denen er die Mathematik der Zahlen auf eine logische Basis stellen wollte.
Die Begriffe von Kardinalzahl und Mächtigkeit einer Menge sind identisch.
Cantor zeigte, daß die transzendenten Zahlen unendlich zahlreicher sind als die natürlichen Zahlen und daß damit die Kardinalzahlen ihrer Mengen sehr verschieden sind. Die Menge

der Punkte auf dem Abschnitt einer Geraden im reellen Zahlenraum ist nicht abzählbar, weil die Menge der transzendenten Zahlen nicht abzählbar ist.
Zwei ungleich große Abschnitte auf einer Geraden enthalten dieselbe Anzahl von Punkten.
Er versuchte, die Schwierigkeiten zu überwinden, die den Paradoxa von Zenon über Kontinuität oder unendliche Teilbarkeit zu Grunde liegen.
Cantor entwickelte die Mengenlehre von 1874 bis 1895, wobei er Unterstützung von Hermite, Weierstraß, Dedekind und Mittag-Leffler bekam, aber Kronecker wurde sein Gegner. Kronecker bestritt die "Existenz" der transzendenten Zahlen, Cantor "bewies" ihre Existenz. Auch ging ihr Streit um den Begriff des Unendlichen in der Arithmetik.
In Cantors Mengenlehre fand man neue Paradoxa und Antinomien, die zur Erforschung der Grundlage mathematischer Beweise anregten.
Die Mengenlehre Cantors wurde zu einer wichtigen Stütze von Algebra, Topologie, Theorie der reellen Funktionen, der Lebesgueschen Maßtheorie und Integrale.

Die Paradoxa und Antinomien der Mengenlehre versuchte man durch verschiedene Methoden zu bewältigen, und zwar die logizistische, intuitionistische, formalistische und operativistische.
1. Logizismus mit Vertretern wie Russell und Whitehead ab 1910. Annahme: Die Mathematik ist ein Zweig der Logik, in symbolischer Logik begründbar und voll erfaßbar. Die Mathematik ist auf reiner Logik aufgebaut bzw. aufbaubar. Hauptgegner u.a. Kurt Gödel (geb. 1906) mit seinem Theorem von 1931, daß es in jedem System Sätze gibt, deren Wahrheit mit den Mitteln des Systems nicht bewiesen werden kann. Die Widerspruchsfreiheit eines Systems ist demnach mit den Mitteln dieses Systems nachweisbar, aber nicht die Richtigkeit seiner Basis. Auch die Vollständigkeit eines Systems wird dadurch relativiert.
2. Intuitionismus mit Vertretern wie Boole, Poincare, Weyl und Wiener. Poincare betonte den intuitiven Charakter schöpferischer mathematischer Tätigkeit. Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) schrieb 1907 seine Dissertation darüber. Ihren Vorstellungen war gemeinsam, daß die Mathematik kein Zweig der Logik ist. Innerhalb des Intuitionismus gab es mehrere Strömungen, die zu großen Teilen sehr verschiedene Ziele verfolgten.
3. Formalismus mit Vertretern wie David Hilbert und Paul Bernays. Hilbert verfaßte mehrere Arbeiten über die Neugründung der Mathematik über die axiomatische Methode (Axiomatisches Denken, 1918, Grundlagen der Mathematik I/II, 1934, 1939). Er verwendete eine kalkülisierte Sprache. Vorstellung: Gründung der mathematischen Bereiche auf Axiomensysteme und die Anwendung der finiten Methode einer entsprechenden Mathematik. Annahme: Jedes mathematische Problem ist grundsätzlich entscheidbar.
4. Operationismus mit Vertretern wie Thoralf Skolem (geb. 1887) und Paul Lorenzen (geb. 1915). Lorenzen baute auf den Arbeiten von Hugo Dingler (1881-1954) auf, der seine Schrift über "Philosophie der Logik und Arithmetik" 1931 verfaßt hatte. Vorstellung: Man operiert mit Figuren nach bestimmten Regeln. Darauf baut man einen Operationskalkül auf, der den Aufbau von Logik und Arithmetik und später der ganzen Mathematik ermöglichen soll.

Henri Poincare (1854-1912) promovierte 1878 über Differentialgleichungen. Wie viele andere große Mathematiker war er der Physik sehr zugewandt und kam zu vielen Problemen der Mathematik durch Fragen der Physik. Er folgte darin Fourier, der dem Mathematiker empfohlen hatte, die Natur gründlich zu studieren, um die besten Anregungen für die Mathematik zu bekommen. 1879 wurde er Professor für Analysis in Caen, 1881 ging er nach Paris. Tätigkeiten:
- Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen 1880. Entwicklung der automorphen Funktionen, parallel mit Felix Klein. Elliptische Funktionen bleiben gegenüber gebrochen-linearen Transformationen, die eine unendliche Gruppe bilden, invariant. Poincare fand noch mehr Funktionen mit einer solchen Invarianz. Sie heißen automorphe Funktionen und schließen die elliptischen Funktionen (wie sin x und cos x) als Sonderfall ein. Die wichtigsten automorphen Funktionen sind periodische Funktionen, elliptische Funktionen und Modulfunktionen.
- Versuch zur Lösung des n-Körper-Problems der Astrophysik, das er in der vereinfachten Form des Dreikörperproblems 1887 behandelte. Von 1892 bis 1910 schrieb er über die Himmelsmechanik Bücher. Er warf das Problem auf, ob es bei Vielkörperproblemen überge-

ordnete periodische Bewegungen gibt, so daß nach einiger Zeit sich alle Bewegungen wiederholen.
- Abhandlungen über die Geometrie der Lage.
- Abhandlungen über die Rotation flüssiger Körper und die Formung der Körper auf Grund ihrer Rotation.

Poincare glaubte nicht daran, daß die Mathematik mit formaler oder symbolischer Logik in ihrem ganzen Umfange erfaßt werden kann.
Ab 1902 versuchte er, in populärwissenschaftlichen Büchern mathematisches und naturwissenschaftliches Wissen der Bevölkerung zugänglich zu machen.
1906 wurde er zum Präsidenten der Akademie gewählt.

Hermann Weyl (1885-1955), erst Professor in Göttingen und später in Princeton, prägte 1921 das Wort von der neuen Grundlagenkrise in der Mathematik, die mit der seit 1900 anhaltenden Grundlagenkrise in der Physik einherging, die 1927 zur Entwicklung der Quantenmechanik führte.
1917 veröffentlichte Weyl sein Buch "Raum, Zeit, Materie", 1918 die Schrift "Das Kontinuum, kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis".

Felix Klein (1849-1925) begann sein Studium der Mathematik bei Julius Plücker in Bonn, um sich die erforderlichen mathematischen Grundlagen für das Studium der Physik zu erarbeiten. 1872 ging er nach Erlangen und verfaßte die als "Erlanger Programm" bezeichnete Arbeit "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen". Darin klassifizierte er jeden Zweig der Geometrie als Invariantentheorie besonderer Transformationsgruppen. Damit machte er die Gruppe zum ordnenden Prinzip in der Geometrie.
1875 wurde Klein Professor für Mathematik in München, 1880 in Leipzig und 1886 in Göttingen.
Klein schrieb 1884 ein Buch über das Ikosaeder, in dem er die Rotationen des regelmäßigen 20-Flächners zu einer Gruppe zusammenfaßte (als Spezialfall der Drehungsgruppe eines regelmäßigen Körpers), die dieselbe ist wie die Gruppe der Permutationen der Wurzeln der algebraischen Gleichung 5. Grades.
Weiterhin wandte er die Gruppentheorie an auf
- die Theorie der linearen Differentialgleichungen,
- elliptische Modulfunktionen,
- Abelsche und automorphe Funktionen.

Die automorphen Funktionen entwickelte er gleichzeitig mit Poincare, wobei er von der Funktionentheorie Riemanns ausging.
Ferner behandelte er die Gruppe der isomorphen Abbildungen des Raumes auf sich selbst.
Auf Arbeiten von Cayley zurückgreifend zeigte Klein, daß
- die Geometrie Euklids und
- die nichteuklidischen Geometrien von Lobatschewski und Riemann nur verschiedene Aspekte einer allgemeineren Art von Geometrie sind.

In seinen Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie, die 1928 nach seinem Tode erschienen, unterteilte er sie in eine hyperbolische, parabolische und elliptische Geometrie.
Eines seiner Ziele war, Algebra, Topologie und Funktionentheorie miteinander in Verbindung zu bringen.

David Hilbert (1862-1943) studierte in Königsberg Mathematik und promovierte 1885 bei Ferdinand Lindemann (1852-1939), der 1882 bewiesen hatte, daß die Kreiszahl π transzendent ist.
Im Jahr darauf habilitierte er sich. 1895 er hielt er einen Ruf nach Göttingen.
Hilbert leistete bedeutende Arbeiten auf dem Gebiet der Grundlagenforschung und logischen Begründung der Mathematik, wobei er die axiomatische Methode wählte.
Zusammen mit Felix Klein, der 1886 als Professor nach Göttingen kam, begründete er die Göttinger Schule, auf dem wissenschaftlichen Ruhm der Universität Göttingen aufbauend, den ihr Gauß, Dirichlet und Riemann verliehen hatten.

Klein und Hilbert bemühten sich um eine genaue Grundlagenforschung und didaktische Aufarbeitung der Mathematik. So hatten sie sehr viele Schüler, von denen sich viele nach 1933 in Princeton, USA, zusammenfanden.
Hilbert hatte enge Kontakte zu Adolf Hurwitz (1859-1919) und Hermann Minkowski (1864-1909).
Auf dem Gebiet der theoretischen Logik arbeitete er mit Wilhelm Ackermann (1896-1962) zusammen.
1928 erschien von ihnen ein Buch darüber. Zu seinen Anhängern in der axiomatischen Methode gehörten Richard Courant (geb. 1888), Felix Hausdorff (1868-1942) und Johann von Neumann (1903-1957).
Moritz Pasch (1843-1930) publizierte 1882 sein Buch "Vorlesungen über neuere Geometrie", in dem er auf die Wichtigkeit von Axiomen hinwies.
Hilbert veröffentlichte 1899 seine stark auf der axiomatischen Methode auf bauende Arbeit über die Grundlagen der Geometrie (Methode der Postulate). Er gab ein Axiomensystem für die ebene euklidische Geometrie, wobei er die geometrisch orientierten Größen des Euklid durch abstrakte Größen ersetzte.
Hilbert beschäftigte sich auch mit Differentialgeometrie, und zwar arbeitete er über Flächen mit konstanter Gauß'scher Krümmung.

Weitere Forschungen:
- Arithmetik: Eine Theorie der algebraischen Zahlkörper, wobei Hilbert auf Galois, Dirichlet und Kummer zurückgriff (1897).
- Algebra: Hilbert behandelte in seiner Doktorarbeit binäre Formen. 1889 entwickelte er eine Theorie der algebraischen Gebilde, 1 Jahr später eine Theorie der algebraischen Formen, die er auf die Invariantentheorie anwandte. Invariantenkörper sah er als Spezialfälle von Funktionenkörpern an. Diese Arbeiten führten zur Theorie der Körper, Ringe und Moduln unter Beteiligung von Emil Artin (1898-1962), Emmy Noether (1882-1935) und Bartel Laendert van der Waerden (geb. 1903).
- Analysis: Variationsrechnung von 1906, Dirichlet'sches Prinzip; Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen von 1904 und Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variablen von 1909.

1900 war der 2. Internationale Mathematiker-Kongreß in Paris. Hilbert formulierte dort die Bedeutung der Axiomatik für Anschauung und Denken. Er nannte dort 23 Probleme der Mathematik, die einen bedeutenden Impuls zur weiteren Forschung liefern werden und gleichzeitig einen großen mathematischen Spürsinn erfordern, der aber mit Logik allein nicht erklärbar ist.

Bartel Laendert van der Waerden leistete bedeutende Arbeiten auf dem Gebiet der Neugründung der Mathematik.
Ähnliches gilt für das Autorenkollektiv, das unter "Nikolas Bourbaki" seine Arbeiten zur geometrischen Gründung großer mathematischer Zweige publiziert.

Die Arbeiten von Levi-Civita und Ricci-Curbastro zur Entwicklung des Absoluten Differentialkalküls wurden in AIONIK VII im Modul N über Allgemeine Relativitätstheorie diskutiert.
Auf den Seiten N 40 bis N 54 ist dort eine Übersicht über die betreffenden mathematischen Entwicklungen in der üblichen Symbolsprache gegeben.
Auf den Gebieten der Differentialgeometrie und Tensoranalysis bedarf es sehr guter Lehrer, um sie dem Laien verständlich darzustellen.
Die in Modul N angegebene Literatur (meistens aus dem Englischen übersetzt) ist sicher für das Studium gut geeignet, aber nicht, um dem Laien die Grundlagen zu erklären.
Ein sehr gutes Buch speziell für den Laien hat John Archibald Wheeler 1990 herausgegeben (deutscher Titel "Gravitation und Raumzeit" 1991), in dem er auch auf Fragen der Differentialgeometrie eingeht.

Mathematik, Erkenntnistheorie und Realität

Misner, Thorne, Wheeler "Gravitation" bei W.H. Freeman and Company 1973
Harold S. M. Coxeter "Unvergängliche Geometrie" Wissenschaft und Kultur, Band 17 Birkhäuser Verlag, Boston 1981

Große Fortschritte in der Mathematik ab etwa 1900 wurden in den folgenden Gebieten erreicht (Auswahl):
- Additive Zahlentheorie,
- abstrakte Algebra einschließlich Darstellungs- und Bewertungstheorie,
- algebraische Geometrie,
- Topologie,
- abstrakte Räume,
- Funktionalanalysis mit Integralgleichungen,
- Maßtheorie,
- Spektraltheorie,
- fastperiodische Funktionen,
- Funktionentheorie mehrerer komplexer Variablen.

Die Grundlagenforschung in der Mathematik wurde weiter ausgebaut:
- Verfeinerung der mathematischen Logik (Semantik, Objekt- und Metasprache),
- Axiomatisierung der Mengenlehre,
- Beweistheorie,
- Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit,
- Theorie der Verbände.

Oft entwickelten Mathematiker Theorien, die erst nach Jahrzehnten oder Jahrhunderten für konkretere mathematische Gebiete oder auch für Physik und andere Wissenschaften sehr bedeutend wurden.
Erkenntnistheorie und Philosophie sollen den Traum der Pythagoräer zu realisieren helfen, die Formen und Prozesse in der Natur durch Zahlen oder ihre (harmonischen) Verhältnisse auszudrücken. Darum müssen Erkenntnistheorie und Philosophie ganz nahtlos in Physik und Mathematik einmünden.
Die heutigen Formen von Mathematik und Physik sind aber nicht endgültig, sondern Übergangsformen und Zwischenglieder zu viel höher entwickelten Wissenschaften und Systemen.

Es lassen sich deshalb folgende Aufgaben u.a. für den Forscher besonders hervorheben:
- Studium der Entwicklung und Geschichte von Mathematik und Physik, um ihr Wesen möglichst gut zu erfassen und die künftige Entwicklung optimal zu lenken.
- Mit entsprechender Vorsicht muß jedes erkenntnistheoretisch-philosophische System in eine mathematische Formulierung gebracht werden, was über geeignete Alles Umfassende Theorien (AUTs) direkt zu einer Vereinheitlichung (Harmonisierung) von Physik und Ethik führt.
- Das, was ab 1911 unter dem Einfluß von Aristoteles, Leibniz, Boole, Russell und Whitehead als Mathematische Logik bezeichnet wird, muß mit den naturwissenschaftlichen Prinzipien in den AUTs quergeprüft werden.
- Man soll bei den Meistern lernen und nicht bei drittklassigen Lehrern.

Beim Studium von Mathematik und Physik muß man versuchen, die Ideen und Intentionen genial-schöpferischer Forscher zu verstehen und diese weiter zu entwickeln.
Genialität und das Schicksal ihrer Produkte sind aber oftmals nur sehr schwer nachzuvollziehen: Clerk Maxwell entwickelte 1864 seine Gleichungen zur Elektrodynamik u.a. nach Modellen, die mechanistischer Art waren.
- Gefahr: Weil die mathematische Sprache und Formulierung erheblich von der Umgangssprache abweicht und vielen Menschen deshalb befremdlich und unverständlich erscheint, drohen die Extreme der totalen Ablehnung und kritiklosen Annahme (letzteres gemäß der Einstellung: "Das Buch muß gut sein, das verstehe ich nicht."). Der Vorwurf rezenter Naturwissenschaftler gegenüber Geisteswissenschaftlern, etwa aus den Eigenheiten der griechischen Syntax auf Naturzusammenhänge schließen zu wollen, trifft aber auch die Naturwis-

senschaftler selber zu, weil sie aus mathematischen Kalkülen (etwa der Epizykeltheorie) zu leicht und unkritisch auf Naturzusammenhänge schließen wollen.

Begrenzte erkenntnistheoretische Reichweite aller mathematischen Kalküle:
Die Gefahr, aus mathematischen Konstruktionen mehr an realen Strukturen herauslesen zu wollen, als darin enthalten ist, ist immer gegeben und zeigte sich schon bei den ersten Kalkülen wie der Epizykeltheorie der Hellenen. Diese Neigung ist eben typisch menschlich.
Weitere solche Beispiele sind
- Laplace'scher Dämon,
- Wärmetod der Welt (gemäß Clausius) und
- Geometrodynamik über dem 4D Raumzeitkontinuum mit Finalem Gravitationskollaps für die globale Realität.

Die Mathematik ist eine den natürlichen Sprachen überlegene höhere Sprache, mehr nicht. In ihr sind keine absoluten Wahrheiten über die Realität verborgen.
Im Verlauf einer ...zig Milliarden Jahre langen Evolution der anorganischen Formen wurden Realitäten wie Räume, Metrik, Physik usw. entwickelt, wobei sich wie in der Evolution der Organismen höhere Strukturen und Harmonien realisierten.
Diese harmonischen Strukturen im Realen sind mathematisch innerhalb gewisser Definitionsbereiche und gewisser Fehlergrenzen beschreibbar, aber die mathematischen Formalismen stehen nicht für die sie beschreibenden Realitäten und sie geben sie auch niemals vollkommen, sondern immer nur in Annäherung wieder.
Jeder mathematische Kalkül, in welcher Vollendung auch immer, hat nur einen begrenzten Definitionsbereich und eine begrenzte erkenntnistheoretische Reichweite, was sorgfältig zu beachten ist. Macht man das nicht, geschieht das, was wir seit 1960 auf dem Gebiet der Tensoranalysis und Geometrodynamik bei ihrer Anwendung auf die *globale Realität* und nicht nur weithin abgeschlossene Teilbereiche von ihr wie Universen erlebt haben.
Es gehört zu den naturimmanenten Eigentümlichkeiten der Höheren Mathematik, daß Albert Einstein die von Gauß und Riemann vorbereiteten Theoriegebäude über Räume auf die der 4D Raumzeit anwenden konnte, wobei ihm Marcel Großmann in den Absoluten Differentialkalkül einführte. Die ungeheuren Erfolge dieses Konzepts und der Relativitätstheorien bewegten viele Physiker und Mathematiker auch noch nach Einsteins Ära dazu, sie und die mathematischen Operationen auf die gesamte Realität, die globale Realität, und nicht nur für unser Universum anzuwenden, womit der alte Fehler wiederholt wurde, mathematische Theoriegebäude außerhalb ihres Definitionsbereiches anzuwenden, und zwar nicht von Mathematikstudenten, sondern von den Koryphäen der Mathematik ihrer Zeit.
Z.B. beim Modell vom Finalen Gravitationskollaps für die globale Realität (und nicht etwa nur für unser Blasenuniversum) begegnet man wieder dem, was man von früheren Fehlern wie Epizykeltheorien, geozentrischen Weltbildern, Laplaceschem Dämon und Wärmetod der Welt inzwischen weiß.
Das ist zwar nicht mathematisch, aber es ist menschlich.

Beständige Gefahr des Verlöschens des Forschungsimpulses:
Es wird hier noch einmal an die mathematischen Forschungsperioden der verschiedenen Völker und Nationen erinnert, die meistens aus inneren Gründen heraus beendet wurden:
- Chinesen, von 500 bis 1200 n.Chr.,
- Inder, 500 bis 1000,
- Araber, 800 bis 1200,
- Mayas, 800 bis 1200.
- Deutschland und Italien von 1200 bis 1630,
- England von 1630 bis 1730, L 37
- Frankreich von 1730 bis 1830 und
- Deutschland von 1830 bis 1930.

Was bei vielen einzelnen Völkern und Nationen geschehen war, kann sicher auch der gesamten Menschheit und ihrer "modernen" Zivilisationen geschehen.
Eine große Gefahr liegt in der Verbreitung pessimistischer und nihilistischer Vorstellungen, die angeblich ganz sicher auf die beste und höchste epochale Wissenschaft gegründet sind.

Wenn die Menschenmassen an ungeeignete Weltmodelle glauben, in ihnen wie meist üblich geistig total gefangen sind und dann zum Schluß kommen, daß alle Realität, alles Leben, alle Vernunft und Zivilisation total sinnlos sind, können die schlimmsten geistigen Epidemien und Rückfälle in die Barbarei geschehen.
Auch die Mathematik hat unter dem einen Aspekt weiter entwickelt zu werden, daß sie wertvolle Beiträge dafür leistet, für die Menschen eine vernünftige Sinnschöpfung zu ermöglichen - selbst dann, wenn Realität, Leben, Vernunft und Zivilisation kein Sinn zukommt, was aber niemals ein Mensch mit Sicherheit wird wissen können.

Die aktuelle Forschung auf den Gebieten der Elementarteilchen- und Hochenergiephysik, Quantentheorie der Gravitation und der Superstringtheorie ist nach Meinung von Michael Green, John Schwarz, Edward Witten und Steven Weinberg von der Entwicklung ganz neuer Zweige der Mathematik extrem abhängig.
Hierbei ist die Entwicklung einer leistungsfähigen Mathematik über diskontinuierlichen Räumen über diskreten Objekten sehr wichtig, denn man geht heute bevorzugt davon aus, daß wir dem realen Geschehen eine höherdimensionale, diskontinuierliche Mannigfaltigkeit zu Grunde legen müssen.
Das bedeutet: Die überkommene Infinitesimalrechnung und die auf ihr aufbauende Tensorrechnung müssen durch mehr der Natur angepaßte Kalküle ersetzt werden.

Es ist für den Naturwissenschaftler und Erkenntnistheoretiker nicht nur wesentlich, die Phänomene, realisierten Formen und Prozesse der Realität möglichst gut mathematisch darzustellen, sondern auch herauszufinden, was das tiefere Wesen der Mathematik und ihrer so sehr eigenartigen Rolle und Bedeutung bei der Darstellung von Naturprozessen ist.
Hier wird ein enger Zusammenhang zwischen Erkenntnistheorie, Wissenschaften, Technik, Kultur und Alltagserleben gut sichtbar.

Alfred North Whitehead und sein Schüler Bertrand Russell versuchten 1910 bis 1913 und 1925 bis 1927, die Mathematische Logik als Fundament solcher Überlegungen zu nehmen. Aber ihr Weg führte nicht zum Ziel, da Unbestimmtheiten und Zufälle in Naturprozessen in den Darstellungen für reales Geschehen unberücksichtigt blieben.

Die Schule um John Archibald Wheeler versuchte um 1970, in die Zeit vor der Entstehung unseres Alls zu schauen und nahm an, daß "damals" die reine Geometrie (pregeometry) "existierte" (Kap. "Beyond the End of Time").
Darf man aber die Ordnung als primär annehmen ?
Ist nicht die Annahme viel wahrscheinlicher, daß die Ordnung über gigantische Zeiträume hin erst allmählich aus dem Chaos entsteht ?
Wo soll eine Ordnung sonst herkommen, also in physikalischen Strukturen real werden ?

Man benötigt noch nicht einmal die hauptsächlich universumexterne Kosmophysik der Aionik, um plausibel zu machen, daß die Darstellung natürlicher Formen und Prozesse oftmals mittels mathematischer Formeln möglich ist: Über gigantische Zeiträume hin haben sie sich als Ergebnis einer Evolution der anorganischen Formen – auch von Blasen- oder Miniuniversen – im Mega- oder Metauniversum oder Multiversum eingestellt.
Mit einem einzigen Universum kommt man da nicht aus, aber mit dem Multiversum in der Version von Andrej Linde.

Olaf Römer hatte schon im 17. Jahrhundert mittels der Beobachtung der Jupitermonde gezeigt, daß die Lichtgeschwindigkeit bei knapp 300000 km/s liegt. Gauß und Riemann kümmerten sich nicht darum, aber Einstein setzte fest, daß die Lichtgeschwindigkeit c eine Konstante sei, ganz unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters. Damit kam er ohne den Äther aus (oder besser: ohne die klassische Äthervorstellung) für Effekte wie die Lorentz-Kontraktion.
Die Paradoxien der Quanteneffekte führten zur Entwicklung der Quantentheorien, von denen Matrizen-, Wellen- und Quantenmechanik die ersten gewesen waren, mit Vorläufern wie beim Planckschen Wirkungsquantum und Bohrschen Atommodell.
Bei den Großen Vereinheitlichten Theorien (GVTs) und noch mehr bei den Alles Umfassenden Theorien (AUTs) laufen Hochenergiephysik, Quantentheorien und Kosmologie zusammen. Stephen W. Hawking verwendete Verfahren von Thermodynamik, Relativitätstheorien

und Quantentheorien bei seiner Theorie über die Strahlung – vor allem nichtrotierender - Schwarzer Löcher,
Steven Weinberg meinte, daß das wirklich und einzig Essentielle die Felder seien, wobei er schon keineswegs mehr nur an z.B. elektromagnetische Felder dachte. Alan Guth verwendete für seine Inflationsmodelle der sich entwickelnden Quantenkosmologie Dutzende von Higgsfeldern – das sind Skalarfelder ohne jeden physikalisch-realen Bezug.
Quantenkosmologen messen dem Vakuum eine reale und aktive Existenz zu, sie halten verschiedene Energiezustände des Vakuums für möglich.
Hier scheinen der Äther in einer neuen Vorstellung und neue Feldkonzeptionen zusammen zu laufen.
Hermann Weyl stellte die Möglichkeit vor, daß man Elementarteilchen wie Wellenbewegungen auf einem See interpretieren kann.
Die Heisenbergschen Unschärferelationen führten bei der Diskussion der Paarerzeugung und –vernichtung zur Vorstellung vom Teilchensee, der aus virtuellen Teilchenpaaren gebildet wird.
Quanteneffekte wie Lamb-Verschiebung, Mikrofeinstruktur von Spektrallinien, auch die Strahlung nichtrotierender Schwarzer Löcher werden durch diesen Teilchensee plausibel gemacht.
Den Äther gibt es nicht – den See aus virtuellen Teilchenpaaren, Dutzende von Higgsfeldern, echtes und falsches Vakuum als reale Größen gibt es: auch das ist ein Paradoxon.

Unsere Lebenswelt ist eine physikalische Realität der niedrigen Geschwindigkeiten und schwachen Felder. Hier operiert unser gesunder Menschenverstand gut. Wenn wir zu sehr viel höheren Geschwindigkeiten und starken Feldern übergehen, zeigt sich uns eine Welt, die wir als paradox bezeichnen müssen, denn die Effekte relativistischer Geschwindigkeiten und starker Felder mit der Möglichkeit zur häufigen Paarerzeugung ergeben eine Welt, die wir mit dem gesunden Menschenverstand oder der klassischen Physik nicht verstehen.
Wir verdanken unsere Existenz dem Leben in einem engen Grenzbereich niedriger Geschwindigkeiten und schwacher Felder, ein Bereich, in dem die Quanteneffekte nicht stören. Das ist aber nur eine Welt, die sich aus einem Grenzübergang zu ganz speziellen Werten aus einer viel allgemeineren Realität ergibt, in der Gesetze gelten, die für uns im klassischen Sine nicht verstehbar sind.
Die Formalismen der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie zeigten, daß es möglich ist, einen mathematischen Weg zu finden, um die Paradoxien der Welt der hohen Geschwindigkeiten und starken Felder letztlich auf den gesunden Menschenverstand zurückzuführen. Deshalb meinte Einstein, daß das auch einstmals bei den Paradoxien der Quanteneffekte möglich sein werde und daß z.B. der statistische Charakter der Quantentheorien nur vorläufiger Art sei, aber nicht dem Wesen der Natur entspreche („Die Natur würfelt nicht“).

Falls das möglich sein sollte, benötigen wir eine Mathematik über diskontinuierlichen Räumen über diskreten Objekten, für die der Calculus und auch nicht der Absolute Differentialkalkül erschaffen wurden, denn die funktionieren nur über differenzierbaren Mengen,
Der Realität kommt eine körnige Struktur sehr viel näher – was ja auch die Erfolge der Quantentheorien nahelegen -, aber was dann zwischen den realen Punkten liegt, was ihren Abstand zueinander und erst ihre eigenständige Wesenheit definiert, muß durch geeignete Axiome festgelegt werden.
Seit 1925 kann man die physikalische Welt nicht mehr anschaulich, im klassischen Sinne verstehen, und daran wird sich nichts mehr ändern. Mittels der axiomatischen Methode wird man mit Hilfe einer neuen, sehr viel schwierigeren Mathematik zu immer besseren Quantentheorien kommen, aber man wird sie wohl nie im klassischen Sinne verstehen können. In diesem Sinne dürften die Paradoxien der Quanteneffekte endgültig sein.
Mit Hilfe geeignet hoch entwickelter Natur- und Ingenieurwissenschaften, die sich auf eine beliebig hoch entwickelte Mathematik stützen, werden unsere Nachfolger – also „wir“ - die globale Realität zwar auch nie ganz verstehen können, aber „wir“ werden uns doch im zum Überleben ausreichenden Ausmaß in ökologischen Lücken halten können - hoffentlich.